

۱- اگر $A = \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{243} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{7}{3}}$ باشد، حاصل $(5+A)^{-\frac{1}{5}}$ کدام است؟

$$A = \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{243} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{7}{3}} = 3^1 \times 3^{\frac{5}{3}} \times 3^{\frac{7}{3}} = 3^{\frac{2}{3} + \frac{5}{3} + \frac{7}{3}} = 3^{\frac{14}{3}} = 3^{\frac{14}{3}}$$

$$(5+A)^{-\frac{1}{5}} = (3^2)^{-\frac{1}{5}} = (3^{\frac{2}{5}})^{-1} = 3^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{5}}}$$

۲- رضا و علی به ترتیب در دو شهر A و B ساکن هستند. رضا برای رفتن به شهر B در مسیر اول، ۱۴ کیلومتر را در جهت می پیماید که با طی کردن ۷ کیلومتر در مسیر دوم و عمود بر مسیر اول به نقطه C برسد. نهایتاً با پیمایش ۹ کیلومتری عمود بر مسیر دوم به شهر B می رسد. علی برای رفتن به شهر A تصمیم دارد ابتدا a کیلومتر به سمت شمال و به همان اندازه به سمت غرب پیماید. در مجموع دو نفر کمترین مسافت را طی می کنند. مقدار a کدام است؟

$$AB^2 = 14^2 + 9^2 = 23^2 \Rightarrow AB = 23$$

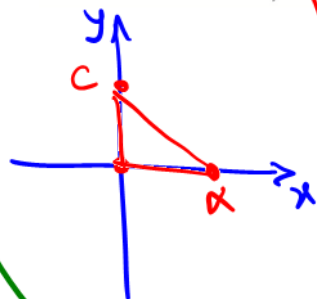
$$AB^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow AB = \sqrt{2}a$$

$$23^2 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{23^2}{2} \Rightarrow a = \frac{23}{\sqrt{2}} = \frac{23\sqrt{2}}{2}$$

۳- مثلی که رئوس آن مبدأ مختصات، نقطه‌ای با عرض c و نقطه‌ای با طول یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 5x + c = 0$

روی محورهای مختصات باشد را در نظر بگیرید. اگر مساحت مثلث برابر c^2 باشد، مقدار c کدام است؟ ($c \neq 0$)

- (۱) $1/75$ (۲) $2/75$ (۳) $-1/75$ (۴) $-2/75$ ✓



$$\text{مساحت} = \frac{C \times \alpha}{2} \rightarrow C = \frac{C \times \alpha}{\alpha} \rightarrow C = \frac{\alpha}{2}$$

$$\alpha^2 + 5\alpha + \frac{\alpha}{2} = 0 \rightarrow \alpha^2 + \frac{11}{2}\alpha = 0 \rightarrow \alpha \left(\alpha + \frac{11}{2} \right) = 0$$

$\swarrow$ $\searrow$
 0 $-5,5$

$$C = \frac{-5,5}{2} = -2,75$$

۴- تابع خطی $f(x) = mx + h$ در هیچ نقطه‌ای با خط $3x - 2y = b$ برخورد ندارد. اگر $f(2) = 2a - 1$ و

$f(1-a) = 2$ باشد، مقدار $f(-6)$ کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۱۱

(۲) ۲

(۱) ۵ ✓

دو خط زمانی با هم برخورد ندارند هم‌سبب باشند.

$$m = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$m = \frac{3}{2}$$

$$f(2) = \frac{3}{2} \times 2 + h = 2a - 1 \rightarrow h = 2a - 4$$

$$f(1-a) = \frac{3}{2} \times (1-a) + h = 2 \xrightarrow{\times 2} 3 - 3a + 2h = 4 \rightarrow 3 - 3a + 2a - 1 = 4 \rightarrow a = 9$$

$$h = 14$$

$$f(-6) = \frac{3}{2} \times -6 + 14 = 5$$

تابع f ، تابع ثابت و برای $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $f(m) + f(n) = f(m)f(n)$. اگر دو زوج مرتب $(2n^2 - 7n + 1, -f(m))$ و $(m^2 - 4m + 6, nf(n))$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشند، مقدار $\left[\frac{mn}{5} \right]$ کدام است؟

۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

عوض = طول

$$2\star = \star^2 \rightarrow \star^2 - 2\star = 0 \rightarrow \star(\star - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} \star = 0 \\ \star = 2 \end{cases}$$

$$2n^2 - 7n + 1 = -0 \rightarrow \Delta = 49 - 4 = 45 \rightarrow n = \text{ایسری } X$$

$$2n^2 - 7n + 1 = -2 \rightarrow 2n^2 - 7n + 3 = 0$$

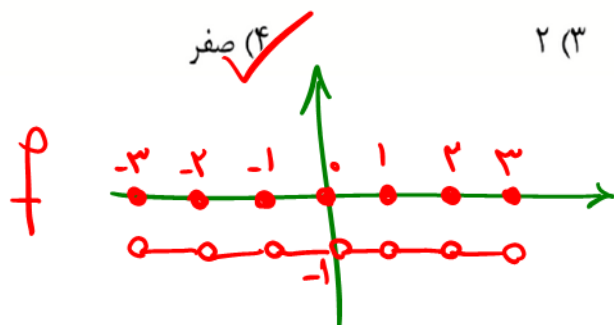
$$X \left[\frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \right] = \left[\frac{7 \pm 5}{4} \right] \checkmark \Rightarrow n = 3$$

$$\left[\frac{12}{5} \right] = 2 \quad \text{خواتمه منه}$$

$$m^2 - 4m + 6 = 3 \times 0 \rightarrow m^2 - 4m + 6 = 0 \rightarrow m = X$$

$$m^2 - 4m + 6 = 3 \times 2 \rightarrow m^2 - 4m = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$$

تابع $f(x) = [x] + [-x]$ با دامنه $-3 \leq x \leq 3$ و g تابع ثابت است. مقدار تابع $\frac{g}{f}$ در چند نقطه صحیح در دامنه برابر ۳ است؟



$$y = \begin{cases} 0 & \text{رند} \\ -1 & \text{مخیررند} \end{cases}$$

$$\frac{g}{f} \leftarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = 3$$

$\frac{g(3)}{f(3)} = 3 \quad X$
 $\frac{g(2)}{f(2)} = 3 \quad X$
 $\frac{g(1)}{f(1)} = 3 \quad X$
 $\frac{g(0)}{f(0)} = 3 \quad X$
 $\frac{g(-1)}{f(-1)} = 3 \quad X$
 $\frac{g(-2)}{f(-2)} = 3 \quad X$
 $\frac{g(-3)}{f(-3)} = 3 \quad X$

۷- اگر تابع خطی $f(x) = (1-2m)x - \frac{2m+3}{2}$ به ازای همه مقادیر m از نقطه (α, β) بگذرد، مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

$$-\frac{5}{2} \quad (4)$$

جایگذاری

$$\frac{5}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (2) \checkmark$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\beta = (1-2m)\alpha - \frac{2m+3}{2} \xrightarrow{m=0} \beta = \alpha - \frac{3}{2} \rightarrow \beta - \alpha = -\frac{3}{2}$$

۸- مجموع ریشه های معادله $x^2 - ax - 1 = 0$ با حاصل ضرب ریشه های معادله $ax^2 - 4x + a + 2 = 0$ برابر است. طول

رأس سهمی $y = x^2 + (1-2a)x - 3$ کدام است؟

$$1/5 \quad (3) \quad \text{ریشه ندارد} \rightarrow 2x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow \alpha = 2 \quad \text{آگر}$$

$$-3 \quad (2)$$

$$-1/5 \quad (1) \checkmark$$

جمع

ضرب

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{\alpha+2}{\alpha} \rightarrow \alpha^2 = \alpha+2 \rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

$$\text{طول رأس سهمی} = \frac{-1+2\alpha}{2} = \begin{cases} \alpha = -1 \rightarrow \frac{-3}{2} = -1.5 \\ \alpha = 2 \rightarrow \frac{3}{2} = 1.5 \end{cases}$$

۹- راننده یک خودرو باید مسیری ۲۰۰ کیلومتری را طی کند. اگر او سرعتش را ۲۰ کیلومتر بر ساعت کاهش دهد، ۵۰ دقیقه دیرتر به مقصد می‌رسد. نسبت سرعت اولیه خودرو به سرعت خودرو پس از کاهش کدام است؟

$$\frac{6}{5} \quad (4)$$

$$\frac{5}{4} \quad (3)$$

$$\frac{4}{3} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\text{زمان} = \frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}}$$

$$\left[\frac{50}{60} = \frac{5}{6} : \text{تبدیل به ساعت} \right]$$

$$\frac{\frac{200}{60}}{v-20} - \frac{\frac{200}{60}}{v} = \frac{5}{6} \quad \times 6v(v-20) \rightarrow \cancel{200v} - \cancel{200v} + 4000 = v^2 - 20v$$

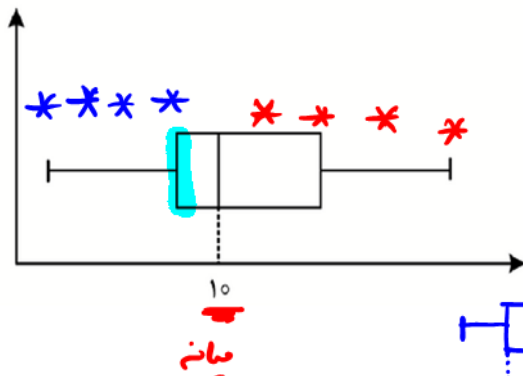
$$v^2 - 20v - 4000 = 0 \quad \text{سرعت اول} = 80$$

$$\begin{matrix} +80 \\ -40 \end{matrix}$$

$$\text{سرعت بعدی} = 80 - 20 = 60$$

$$\text{خواسته شده} : \frac{80}{60} = \frac{4}{3}$$

۱۰- داده‌های نمودار زیر، اعداد زوج هستند. اگر مقدار ۴ داده بیشتر از میانه باشد، کدام می‌تواند بیشترین مقدار ممکن برای میانگین داده‌های کمتر از میانه باشد؟



(۱)

۷/۵ (۲) ✓

۸/۵ (۳)

۹ (۴)

چنانچه $Q_1 = 10$ باشد، شکل به صورت می‌شود که برخلاف شکل می‌دهد.

و $Q_1 = 9$ هم نیست.

$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ 6 & 8 & 8 & 8 \end{matrix} \rightarrow \text{میانگین} = \frac{30}{4} = 7.5$$

۱۱- اگر $۴, ۱۶, ۲۵ - ۱۷, ۲۵$ به ترتیب مربع انحراف از میانگین داده‌های متمایز $۶, ۴, a, ۱۳$ باشد، واریانس این داده‌ها کدام است؟

$۱۱/۵$ (۴) ✓ ۱۱ (۳) $۹/۵$ (۲) ۹ (۱)

$$\frac{a+۱۳}{۴} = \frac{a+۱۳}{۴} - ۶ = ۲ \rightarrow a = ۹$$

$$\text{واریانس} = \frac{\text{جمع مربع انحراف از میانگین}}{\text{تعداد}} = \frac{۴ + ۱۶ + ۱ + ۲۵}{۴} = \frac{۴۶}{۴} = \frac{۲۳}{۲} = ۱۱/۵$$

۱۲- با چیدن قطعات یک پازل در کنار هم، مربعی به مساحت a ساخته می‌شود. این پازل طوری طراحی شده است که با تغییر چینش بعضی قطعات می‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه به مساحت b نیز درست کرد. دانش‌آموزی استدلال زیر را در مورد رابطه بین a و b نوشته است. ایراد این استدلال در کدام گام است؟

۱) $a = b$	 $\rightarrow a$	 $\rightarrow b$
۲) $a^2 = ab$	طرفین تساوی گام ۱ را در a ضرب کرده است	
۳) $a^2 - b^2 = ab - b^2$	از طرفین تساوی گام ۲ کم کرده است	
۴) $(a-b)(a+b) = (a-b)b$	طرفین تساوی گام ۳ را تجزیه کرده است	
۵) $\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = \frac{(a-b)b}{(a-b)}$	طرفین تساوی گام ۴ را بر $a-b$ تقسیم کرده است	
۶) $b+b = b$	به جای a طبق گام ۱، مقدار b را قرار داده است	
۷) $\frac{۲b}{b} = \frac{b}{b}$	طرفین تساوی گام ۷ را بر b تقسیم کرده است	
۸) $۲ = ۱$		

۷ (۴) ۶ (۳) ۵ (۲) ✓ ۳ (۱)

$\times a$ (۲)
 $-b^2$ (۳)
 مزدوج فاکتورگیری (۴)
 ۰ (۵)

۱۳- کدام گزاره، هم‌ارز منطقی گزاره $\sim [((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow p]$ است؟

- (۱) $p \wedge ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r))$ (۲) $\sim p \vee ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r))$ (۳) $(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$ (۴) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

$$\begin{aligned} & \sim [(\sim p \vee ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)))] \\ & \rightarrow \sim p \wedge \sim ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)) \\ & \rightarrow \sim p \wedge (\sim (q \wedge r) \wedge \sim (\sim q \wedge \sim r)) \\ & \rightarrow \sim p \wedge (\sim q \vee \sim r) \wedge (q \vee r) \\ & \rightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \end{aligned}$$

بیکار
۸۰٪

ساعات + بیکار
x y

۱۴- در یک منطقه ۱۵۰۰ نفر از افراد ۱۸ ساله و بیشتر هستند. اگر با ایجاد n شغل ۲۰ درصد از تعداد بیکارها کم شود،

نرخ بیکاری ۵ درصد کاهش می‌یابد. چند شغل دیگر ایجاد شود تا نرخ بیکاری $\frac{2}{3}$ کاهش یابد؟

۲۵۰ (۴)

۱۷۵ (۳) ✓

۱۲۵ (۲)

۵۰ (۱)

$$x + y = 1500$$

$$x - n = 0.18x \rightarrow n = 0.18x$$

۵ - نرخ بیکاری اولیه = نرخ بیکاری ثانویه

$$\frac{x - n}{1500} \times 100 = \frac{x}{1500} \times 100 - 5 \rightarrow \frac{0.18x}{15} = \frac{x}{15} - 5 \rightarrow$$

$$0.18x = x - 75 \rightarrow x = 375$$

$$n = 0.18 \times 375 = 75$$

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{375}{1500} \times 100 = 25 \rightarrow \text{تعداد بیکاری} = 375 - 75 = 300$$

$$\frac{300 - A}{1500} \times 100 = \frac{1}{3} \times 25 \rightarrow A = 175$$

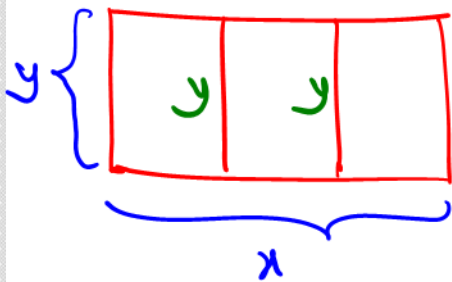
۱۵- سه نفر می خواهند زمین مستطیل شکلی را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و حصارکشی کنند، به طوری که یک حصار مشترک بین دو قسمت کشیده شود. اگر کمترین حصارکشی ۱۹۰ متر باشد، ضابطه جبری مساحت زمین کدام است؟

$$S(x) = 190x - x^2 \text{ و } 0 < x < 95 \quad (2)$$

$$S(x) = 95x - 2x^2 \text{ و } 0 < x < 47.5 \quad (1) \quad \checkmark$$

$$S(x) = 190x - x^2 \text{ و } 0 < x < 47.5 \quad (4)$$

$$S(x) = 95x - 2x^2 \text{ و } 0 < x < 95 \quad (3)$$



$$\text{حصار: } 2x + 4y = 190 \rightarrow x = \frac{190 - 4y}{2} = 95 - 2y \quad +$$

$$95 - 2y > 0 \rightarrow 0 < y < 47.5$$

$$\text{مساحت} = x \times y = (95 - 2y) \times y = 95y - 2y^2$$

۱۶- یک پارکینگ دارای ۴ درب است. وقتی از یک درب وارد می شوید باید از درب دیگری خارج شوید. به چند طریق حسن و علی می توانند از این پارکینگ استفاده کنند به طوری که آنها درب ورودی و درب خروجی یکسانی نداشته باشند؟

۵۴ (۴)

۸۴ (۳)

۱۰۸ (۲) ✓

۱۶۸ (۱)

$$\text{حسن: } \frac{4}{\text{دروزی}} \times \frac{3}{\text{خروجی}} = 12$$

$$\xrightarrow{\times} 108$$

$$\text{علی: } \frac{3}{\text{دروزی}} \times \frac{3}{\text{خروجی}} = 9$$

✓ نفره

۱۷- خانواده‌ای دارای ۵ فرزند شامل ۲ فرزند پسر و ۳ فرزند دختر است. قرار است ۵ نفر از اعضای این خانواده با اتومبیل شخصی به مسافرت بروند. احتمال اینکه فقط والدین حق رانندگی داشته باشند و دو فرزند پسر با هم به مسافرت نروند، کدام است؟



$$\frac{1}{7} \quad (4)$$

$$\frac{3}{7} \quad (3)$$

$$\frac{10}{21} \quad (2)$$

$$\frac{11}{21} \quad (1) \quad \checkmark$$

پسر پسر / دختر دختر / پدر مادر

$$K = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

۱- پسر ۲ دختر ۱ والدین $\binom{2}{1} \times \binom{3}{2} \times \binom{2}{1} = 6$

۱- پسر ۳ دختر ۱ والدین $\binom{2}{1} \times \binom{3}{3} \times \binom{2}{1} = 4$

$$K = \frac{11}{21}$$

۰- پسر ۳ دختر ۱ والدین $\binom{2}{0} \times \binom{3}{3} \times \binom{2}{1} = 1$

۱۸- جمله نهم دنباله بازگشتی $a_1 = a_2 = 1$ ، $a_{n+1} = a_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + a_{n-\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}$ ، $[]$ ، علامت جزء صحیح است.

$$10 \quad (4)$$

$$8 \quad (3)$$

$$6 \quad (2) \quad \checkmark$$

$$4 \quad (1)$$

$$n=2 \rightarrow a_3 = a_1 + a_2 = 2$$

$$n=3 \rightarrow a_4 = a_2 + a_2 = 2$$

$$n=4 \rightarrow a_5 = a_2 + a_3 = 3$$

$$n=5 \rightarrow a_6 = a_3 + a_4 = 4$$

$$n=6 \rightarrow a_7 = a_3 + a_5 = 5$$

$$n=7 \rightarrow a_8 = a_4 + a_6 = 6$$

$$n=8 \rightarrow a_9 = a_4 + a_7 = 7$$

۱۹- اگر x, y, z دنباله‌ای هندسی با جملات نابرابر و $x, 3y, 5z$ یک دنباله حسابی باشد، مقدار $\left[\frac{x}{z}\right]$ کدام است؟

۲۵ (۴) ✓

۹ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

$$9y = x + 5z$$

$$\downarrow \div 9$$

$$y = \frac{x + 5z}{9}$$

$$x^2 - 24xz + 25z^2 = 0$$

$$\begin{matrix} +1z & +25z \end{matrix}$$

$$y^2 = x \times z$$

$$\left(\frac{x + 5z}{9}\right)^2 = x \times z$$

$$\frac{x^2 + 10xz + 25z^2}{81} = xz$$

$$x = z \rightarrow \left[\frac{x}{z}\right] = 1$$

$$x = 25z \rightarrow \left[\frac{x}{z}\right] = 25$$

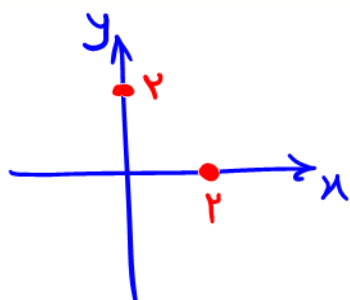
۲۰- نمودار تابع نمایی $f(x) = k + 4^{ax-b}$ محورهای طول و عرض را در نقاطی به فاصله ۲ واحدی از مبدأ مختصات قطع می‌کند. مقدار bk کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳) ✓

۴ (۲)

۶ (۱)



$$(0, 2) \rightarrow 2 = k + 4^{-b}$$

$$(2, 0) \rightarrow 0 = k + 4^{2a-b}$$

$$k = -2 \quad 4^{-b} = 4 \rightarrow b = -1$$

به جای k نمی‌توان ۱، ۰، ۱، ۲ گذاشت

$$b \times k = -1 \times -2 = 2$$

تقدیم به تمام شاگردان پیرمدرس
ایران

مهندس ایمر
مدرس ارشد پایه و کنکور
تیر ۱۴۰۲