

نوین کنکور

کنکور

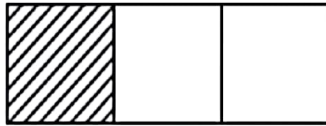
امتحان نهایی

**نوین کنکور
شرط لازم و کافی
برای موفقیت**

novinkonkor.com

۱- در شکل زیر مستطیل بزرگ از ۳ مربع یکسان تشکیل شده است. اگر مساحت مستطیل بزرگ از $\frac{2}{3}$ مساحت یکی

از مربع ها ۱۴ واحد بیشتر باشد، اختلاف طول و عرض مستطیل بزرگ کدام است؟



(۱) $2\sqrt{6}$ ✓

(۲) $\sqrt{6}$

(۳) $2\sqrt{3}$

(۴) $\sqrt{3}$

ضلع صریح را x می‌گیریم، پس طول و عرض مستطیل بزرگ به ترتیب $3x$ و x هستند.

مساحت مستطیل بزرگ و صریح را حساب می‌کنیم:

$$S_{\text{مستطیل}} = \text{طول} \times \text{عرض} = (3x)(x) = 3x^2$$

$S_{\text{مربع}} = (\text{ضلع})^2 = x^2$

مساحت مستطیل از $\frac{2}{3}$ مساحت صریح، ۱۴ واحد بیشتر است، پس:

$$3x^2 = \frac{2}{3}x^2 + 14 \xrightarrow{\times 3} 9x^2 = 2x^2 + 42 \rightarrow 7x^2 = 42 \rightarrow x^2 = 6 \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{6}$$

$\underbrace{3x}_{\text{طول}} - \underbrace{x}_{\text{عرض}} = 2x = 2\sqrt{6}$

اختلاف طول و عرض مستطیل برابر است با:

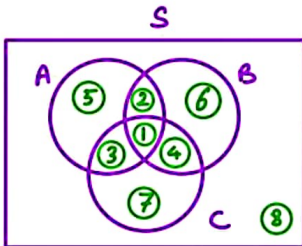
۲- مجموعه $(A - B) - (C - B)$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

(۲) $A - (B \cup C')$

(۱) $(B - C) - A$

(۴) $(A - B) - C$ ✓

(۳) $B - (A \cup C)$



روی نمودارون، سه مجموعه A و B و C را نشان می‌دهیم و آن را به ۸ ناحیه تقسیم می‌کنیم:

مجموعه داده شده در صورت سوال را بر حسب نواحی می‌نویسیم:

$$\underbrace{(A - B)}_{5, 3} - \underbrace{(C - B)}_{3, 7} = \{5, 3\} - \{3, 7\} = \{5\}$$

برای هر چهار مجموعه داده شده در گزینه‌ها، همین کار را انجام می‌دهیم. می‌بینیم که فقط ناحیه ۵ شده، جواب است!

(۱) $\underbrace{(B - C)}_{2, 4} - A = \{2, 4\} - \{5, 2, 1, 3\} = \{4\}$ ✗

(۲) $A - \underbrace{(B \cup C')}_{\text{نواحی ۵ و ۶}} = \{5, 2, 1, 3\} - (\{2, 4, 6, 7\} - \{5, 2, 3, 8\}) = \{5, 2, 3\} - \{4, 6\} = \{5, 2, 3\}$ ✗

(۳) $B - \underbrace{(A \cup C)}_{1, 2, 3, 4, 5, 7} = \{2, 4, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} = \{4\}$ ✗

(۴) $\underbrace{(A - B)}_{5, 3} - C = \{5, 3\} - \{1, 3, 4, 7\} = \{5\}$ ✓

نامزدترین طراح دنیا!
جواب رو تو گزینه آخر نداشته

۳- تابع با ضابطه $f(x) = (\Delta x^2 - (ax+1)(x-b))c$ ثابت است. اگر $f(x+y) = f(x)f(y) - 2$ باشد، مقدار مثبت c کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۵ (۲)

۱۰ (۱) ✓

تابع f را ساده کنیم:

$$f(x) = (\Delta x^2 - (ax+1)(x-b))c = (\underbrace{\Delta x^2 - ax^2}_{\text{ضرایب } x^2} + \underbrace{abx - x + b}_{\text{ضرایب } x} + b)c =$$

$$(\Delta - a)x^2 + (ab - 1)x + b)c$$

چون f ثابت است، باید ضرایب x^2 و x صفر باشند:

$$\begin{cases} \Delta - a = 0 \rightarrow a = \Delta \\ ab - 1 = 0 \rightarrow \Delta b - 1 = 0 \rightarrow b = \frac{1}{\Delta} \end{cases}$$

با جایگذاری دو مقدار $a = \Delta$ و $b = \frac{1}{\Delta}$ ، تابع f به شکل زیر در می آید:

$$f(x) = (\underbrace{(\Delta - \Delta)x^2}_{0} + \underbrace{(ab - 1)x}_{0} + \underbrace{b}_{\frac{1}{\Delta}})c = (\frac{1}{\Delta})c = \frac{c}{\Delta}$$

حال برای پاسخ به سوال دوم که سوال تابع دوم و جواب تمام $f(x)$ که $\frac{c}{\Delta}$ قرار می دهیم:

$$\underbrace{f(x+y)}_{\frac{c}{\Delta}} = \underbrace{f(x)}_{\frac{c}{\Delta}} \underbrace{f(y)}_{\frac{c}{\Delta}} - 2 \rightarrow \frac{c}{\Delta} = (\frac{c}{\Delta})^2 - 2 \rightarrow \frac{c}{\Delta} = \frac{c^2}{\Delta^2} - 2 \xrightarrow{\times \Delta^2} \Delta c = c^2 - 2\Delta \rightarrow$$

$$c^2 - \Delta c - 2\Delta = 0 \xrightarrow{\text{فکتوریزه}} (c - 1)(c + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} c = 1 \quad \checkmark (\text{مقدار مثبت}) \\ c = -2 \end{cases}$$

۴- اگر $f(x) = \begin{cases} [1-x] & x \text{ مثبت} \\ [1+2x] & x \text{ منفی} \end{cases}$ باشد، حاصل $f(\sqrt{\pi}) + f(-1,7)$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۴ ✓ (۴) -۱

اول باید چک کنیم $\sqrt{\pi}$ و $-1,7$ در کدام دامنه قرار می گیرند؟ $x|x| > 0$ ۱ $x|x| < 0$

• اگر $\sqrt{\pi}$ را در $x|x|$ قرار دهیم به $\sqrt{\pi}|\sqrt{\pi}|$ می رسیم که حاصلش مثبت است. پس مربوط به فاصله اول است که دامنه اش « $x|x|$ مثبت » است :

$$f(x) = [1-x] \xrightarrow{x=\sqrt{\pi}} f(\sqrt{\pi}) = [1-\sqrt{\pi}] = [1-\underbrace{\sqrt{3,14}}_{1,4\dots}] = [-0,4] = -1$$

• اگر $-1,7$ را در $x|x|$ قرار دهیم به $-1,7|-1,7|$ می رسیم که حاصلش منفی است. پس مربوط به فاصله اول است که دامنه اش « $x|x|$ منفی » است :

$$f(x) = [1+2x] \xrightarrow{x=-1,7} f(-1,7) = [1+2(-1,7)] = [1-3,4] = [-2,4] = -3$$

$$f(\sqrt{\pi}) + f(-1,7) = -1 + (-3) = -4 \quad \text{پس :}$$

۵- نقاط متمایز $(1, 3a)$ ، $(-1, a)$ و $(a, 3)$ روی یک خط قرار دارند. مقدار a کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ ✓ (۳) ۱ (۴) ۳

شیب خط لایحه از نقاط $A(1, 3a)$ و $B(-1, a)$ را حساب می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{a - 3a}{-1 - 1} = \frac{-2a}{-2} = a$$

شیب خط لایحه از نقاط $B(-1, a)$ و $C(a, 3)$ را حساب می‌کنیم:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3 - a}{a + 1}$$

چون سه نقطه A ، B و C روی یک خط قرار دارند، پس دو شیب باید برابر باشند:

$$m_{AB} = m_{BC} \rightarrow a = \frac{3-a}{a+1} \xrightarrow[\text{وین}]{\text{لایحه}} a^2 + a = 3 - a \rightarrow a^2 + \underbrace{2a}_{\text{ج}} - \underbrace{3}_{\text{ص}} = 0 \xrightarrow{\text{میکر}}$$

$$(a+3)(a-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -3 \checkmark \\ a = 1 \times \end{cases}$$

به ازای $a=1$ ، معادله سه نقطه را بنویسیم: $A(1, 3)$ ، $B(-1, 1)$ ، $C(1, 3)$

چون معادله نقطه A و C یکسان است، پس $a=1$ رد می‌شود (سوال گفته سه نقطه متمایز)

۶- رابطه‌های زیر، تابع هستند. اگر مجموعه A بر د تابع $f - g$ باشد، مجموع مقادیر اعضای A کدام است؟

$$f = \left\{ \left(7, \frac{k}{4} - 1 \right), \left(-\frac{5}{4}, 1 - k \right), (\Delta, 2), \left(7, \frac{1}{4} \right) \right\}$$

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$g = \left\{ (\Delta, n), \left(-\frac{5}{4}, \frac{n-1}{4} \right), (4, 3 - 2n^2), \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4} \right) \right\}$$

$$\frac{7}{2} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\frac{11}{6} \quad (3)$$

$$-\frac{7}{6} \quad (4)$$

• توزیع مرتب $(7, \frac{k}{4} - 1)$ و $(7, \frac{1}{4})$ در f داریم نه مولفه‌های اولشان برابرند. برای آن که f تابع باشد

باید مولفه‌های دوم این توزیع مرتب برابر باشند: $\frac{k}{4} - 1 = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} k - 4 = 1 \rightarrow k = 5$

• توزیع مرتب $(-\frac{5}{4}, \frac{n-1}{4})$ و $(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4})$ در f داریم نه مولفه‌های اولشان برابرند. برای آن که f تابع باشد

باید مولفه‌های دوم این توزیع مرتب برابر باشند: $\frac{n-1}{4} = -\frac{3}{4} \xrightarrow{\times 4} n - 1 = -3 \rightarrow n = -2$

با جای‌نذار $k = 5$ و $n = -2$ ، توابع f و g را می‌نویسیم:

حذف به خاطر تکرار

$$f = \left\{ \left(7, \frac{5}{4} - 1 \right), \left(-\frac{5}{4}, 1 - 5 \right), (\Delta, 2), \left(7, \frac{1}{4} \right) \right\} \xrightarrow{k=5} f = \left\{ \left(-\frac{5}{4}, -4 \right), (5, 2), \left(7, \frac{1}{4} \right) \right\}$$

حذف به خاطر تکرار

$$g = \left\{ (\Delta, n), \left(-\frac{5}{4}, \frac{n-1}{4} \right), (4, 3 - 2n^2), \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4} \right) \right\} \xrightarrow{n=-2} g = \left\{ (5, -2), (4, -5), \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4} \right) \right\}$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \left\{ -\frac{5}{4}, 5 \right\}$$

اشتراک دامنه f و g را می‌گیریم:

مقادیر تابع f و g را در $x = 5$ و $x = -\frac{5}{4}$ حساب می‌کنیم:

$$\bullet (f-g)\left(-\frac{5}{4}\right) = f\left(-\frac{5}{4}\right) - g\left(-\frac{5}{4}\right) = -4 - \left(-\frac{3}{4}\right) = -4 + \frac{3}{4} = -\frac{13}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\bullet (f-g)(5) = f(5) - g(5) = 2 - (-2) = 4$$

پس برد $f-g$ ، مجموعه $\left\{ -\frac{1}{4}, 4 \right\}$ است که مجموع اعضایش برابر است با: $-\frac{1}{4} + 4 = -\frac{1}{4} + \frac{16}{4} = \frac{15}{4}$

۷- هر دو ریشه معادله $(2a+1)x^2 - 4ax + 2a-1 = 0$ مثبت هستند. a کدام مقدار زیر می تواند باشد؟

$$\frac{3}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (3) \checkmark$$

$$-\frac{3}{10} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

ضرایب سه ریشه $(2a+1)x^2 - 4ax + 2a-1 = 0$ را منفی کردیم.

اگر سه ریشه درجه دوم دارای ۲ ریشه مثبت باشد، باید هر سه شرط زیر را داشته باشد:

① جمع ریشه ها باید مثبت باشد (چون جمع دو عدد مثبت، مثبت است) در این جا $S = \frac{-B}{A} = \frac{4a}{2a+1} > 0$

② ضرب ریشه ها باید مثبت باشد (چون ضرب دو عدد مثبت، مثبت است) در این جا $P = \frac{C}{A} = \frac{2a-1}{2a+1} > 0$

③ دلتا باید مثبت باشد (چون ۲ تار ریشه داریم) $\Delta > 0$

شرط ۱ و $\frac{4a}{2a+1} > 0$ را به انزال هر دو طرفه بررسی کنیم؟ اگر لازم شد شرط ۳ را هم بررسی کنیم.

① $a = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} S = \frac{4(\frac{1}{4})}{2(\frac{1}{4})+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \checkmark \\ P = \frac{2(\frac{1}{4})-1}{2(\frac{1}{4})+1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \times \rightarrow \text{چون } P \text{ منفی شد، پس رد می شود} \end{cases}$

② $a = -\frac{3}{10} = -0.3 \rightarrow \begin{cases} S = \frac{4(-0.3)}{2(-0.3)+1} = \frac{-1.2}{0.4} = -3 \times \rightarrow \text{رد می شود و نیازی به چک کردن } P \text{ نیست} \end{cases}$

③ $a = -\frac{2}{3} \rightarrow \begin{cases} S = \frac{4(-\frac{2}{3})}{2(-\frac{2}{3})+1} = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{1}{3}} = 8 \checkmark \\ P = \frac{2(-\frac{2}{3})-1}{2(-\frac{2}{3})+1} = \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}} = 7 \checkmark \end{cases} \rightarrow \text{جواب صحیح} \rightarrow \text{تنها گزینه ای که هر ۳ شرط را دارد}$

④ $a = \frac{3}{8} \rightarrow \begin{cases} S = \frac{4(\frac{3}{8})}{2(\frac{3}{8})+1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{4}} = \frac{6}{7} \checkmark \\ P = \frac{2(\frac{3}{8})-1}{2(\frac{3}{8})+1} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{7}{4}} = -\frac{5}{7} \times \rightarrow \text{چون منفی شد، رد می شود} \end{cases}$

۸- معادله $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x} - 1 = \frac{x}{x-2}$ دارای چند جواب منفی است؟

(۴) صفر

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱ ✓

درست چیست در جواب این نویسیم $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x}$ و ساده می‌کنیم.

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x} - \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x} = \frac{x}{x-2} \rightarrow \frac{\cancel{x^2 - 2x} + 3 - \cancel{x^2 + 2x}}{x^2 - 2x} = \frac{x}{x-2} \rightarrow \frac{3}{x^2 - 2x} = \frac{x}{x-2}$$

در فرج کسر است پس از آن کات می‌کنیم و پس از آن $x-2$ را از فرج حذف می‌کنیم؛ به طرفین و پس از آن:

$$\frac{3}{x(\cancel{x-2})} = \frac{x}{\cancel{x-2}} \rightarrow \frac{3}{x} = \frac{x}{1} \xrightarrow{\text{طرفین} \times \text{طرفین}} x^2 = 3 \rightarrow x = \pm \sqrt{3}$$

فرج کردیم به ازای دو جواب درست آمده، منفرجه شوند، پس هر دو قابل قبول اند.

این به درم فقط یک جواب منفی ($x = -\sqrt{3}$) دارد.

۹- در داده‌های ۱۵، ۱۱/۵، ۴، ۵، ۹، ۱۱، ۵/۱۰، ۱۷ و ۱، حاصل ضرب میانه و میانگین کدام است؟

۹۸ (۴) ✓

۸۴ (۳)

۷۲ (۲)

۶۳ (۱)

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم: ۱، ۴، ۵، ۹، ۱۰/۵، ۱۱، ۱۱/۵، ۱۵، ۱۷

تعداد داده‌ها فرد است، پس داده وسط، میانه است: $Q_3 = 10.5 = \frac{21}{2}$

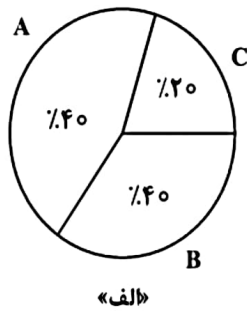
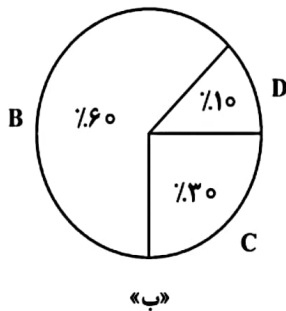
مثلاً برای بدست آوردن میانگین، باید مجموع را بر تعداد تقسیم کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\overbrace{1+4+5+9}^{19} + \overbrace{10.5+11+11.5}^{22} + \overbrace{11+15+17}^{43}}{9} = \frac{84}{9} = \frac{28}{3}$$

$$\bar{x} \times Q_3 = \frac{28}{3} \times \frac{21}{2} = 98$$

حاصل ضرب میانگین و میانه برابر است با:

۱۰- اگر زاویه مربوط به داده «A» در یک نمودار دایره‌ای شامل چهار داده A، B، C و D برابر ۱۳۵ درجه باشد، کدام عدد زیر، مجموع فراوانی نمودار «ب» است؟

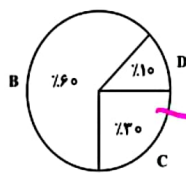


۱۶ (۱)

۱۵ (۲)

۱۰ (۳) ✓

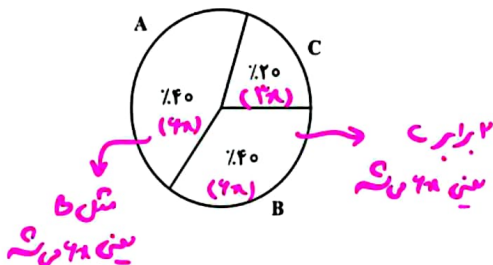
۹ (۴)



با توجه به نمودار (ب) که ۳۰ درصد آن C و ۱۰ درصدی D است، نتیجه می‌گیریم، فراوانی C، ۳ برابر فراوانی D است.

فرض کنیم فراوانی D و C به ترتیب x و $3x$ است.

حالا با توجه به نمودار (الف)، فراوانی A و B را بر حسب x می‌نویسیم:



پس ترتیب فراوانی A، B، C و D به صورت $2x$ ، $6x$ ، $3x$ و x است.

با توجه به اینکه تعداد فراوانی باید عدد طبیعی باشد، پس x حتماً عددی طبیعی است، یعنی x باید ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ... باشد.

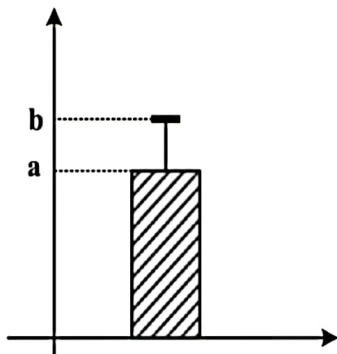
$$f_B + f_C + f_D = 2x + 3x + x = 6x$$

فراوانی کل داده‌ها نمودار (ب) را تشکیل می‌دهد:

اگر x اعداد ۱، ۲، ۳، ... قرار دهیم، مقدار $6x$ برابر با ۶، ۱۲، ۱۸، ... می‌شود که در بین گزینه‌ها فقط ۱۰ را داریم.

بهتر بود در صورت سوال قید می‌شد «کدام عدد زیر می‌تواند مجموع فراوانی داده‌ها در نمودار (ب) باشد».

۱۱- داده‌های ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷، a و b ، مربوط به سن دوستان مریم است که در تولد ۲۲ سالگی اش (مهمانی اول) شرکت داشتند و نمودار زیر نشان‌دهنده دو شاخص سن افراد حاضر در این مهمانی است. مریم ۱۰ سال بعد، زمانی که صاحب فرزند شد، تصمیم می‌گیرد به اتفاق پدر بزرگ و مادر بزرگش یک مهمانی (مهمانی دوم) ترتیب دهد و همه دوستانش که در مهمانی اول حضور داشتند را دعوت کند. اگر واریانس سن افراد در مهمانی اول ۴ باشد، مقدار شاخص مرکزی مناسب برای سن افراد در مهمانی دوم، کدام است؟



- ۳۴/۵ (۱) ✓
۳۴ (۲)
۳۳/۵ (۳)
۳۵ (۴)

• **مهمانی اول:** واریانس سن افراد حاضر در مهمانی اول $\sigma^2 = 4$ بوده پس انحراف معیار سن $\sigma = 2$ است.

طبق میانه سنی $b - a$ برابر با انحراف معیار است: $b - a = 2 \rightarrow b = a + 2$

از طرفی میانه سن ۷ نفر ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷، a و b و (۲۲) $\downarrow$ باید برابر با ارتفاع متیل (یعنی a) باشد پس:

$$a = \frac{a + b + \overbrace{21 + 23 + 25 + 27}^{118} + 22}{7} \quad \xrightarrow{b = a + 2} \quad a = \frac{a + a + 2 + 118}{7} \rightarrow a = \frac{2a + 120}{7} \quad \xrightarrow{\text{طرفین در ۷ ضرب}} \quad 7a = 2a + 120$$

$$7a = 2a + 120 \rightarrow 5a = 120 \rightarrow a = 24 \xrightarrow{\text{پس}} b = a + 2 = 26$$

• **مهمانی دوم:** به سن همه افراد ۱۰ سال افزوده می‌شود. فیهما فرزندان پدر بزرگ و مادر بزرگ هم در این مهمانی حضور دارند:

$$B, P, M, 37, 35, 33, 31, b+10, a+10, 32$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 پیم مریم پدر بزرگ مادر بزرگ

در بین داده‌ها ۱۰ سال به سن همه افراد افزوده می‌شود. فیهما فرزندان پدر بزرگ و مادر بزرگ هم در این مهمانی حضور دارند. چگونگی سن فرزندان، مادر بزرگ و پدر بزرگ باقی‌مانده دارد، پس آن‌ها را داده دوستان در نظر می‌گیریم و باید میان این رده عنوان میانه سنی مناسب انتخاب کنیم.

داده‌ها را مرتب می‌کنیم: $B, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, M, P$

$\underbrace{34, 35}_{\text{دو داده وسط}}$

$$Q_2 = \frac{34 + 35}{2} = 34.5$$

پس میان برابر با میانه دو داده وسط است:

۱۲- اگر p و $q \sim$ گزاره‌های درست و r گزاره دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره به r بستگی دارد؟

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow q \quad (۲) \quad \checkmark$$

$$(q \Rightarrow r) \Rightarrow p \quad (۱)$$

$$(r \Rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim p \quad (۴)$$

$$(r \Rightarrow p) \Rightarrow q \quad (۳)$$

p و q درست اند، پس p درست و q نادرست است. r هم که دلخواه است.
 هرگاه لازم شد از معادل‌های تبدیل گزاره‌های منطقی به فعلی استفاده می‌کنیم و ارزش گزاره‌ها را برچسب می‌زنیم. می‌توانیم بگوییم
 معادل r یا $\sim r$ شد جواب است؛

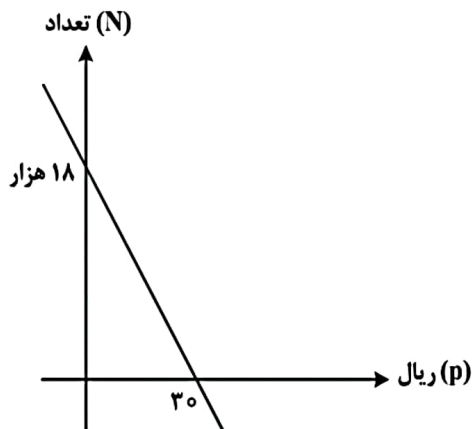
$$(۱) (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \equiv \underbrace{(F \Rightarrow r)}_T \Rightarrow T \equiv T \quad \times$$

$$(۲) (p \Rightarrow r) \Rightarrow q \equiv \underbrace{(T \Rightarrow r)}_{\text{تبدیل به فعلی}} \Rightarrow F \equiv \underbrace{(\sim T \vee r)}_F \Rightarrow F \equiv \underbrace{r \Rightarrow F}_{\text{تبدیل به فعلی}} \equiv \sim r \vee F \equiv \underbrace{(\sim r)}_{\text{به } r \text{ بستگی دارد}} \quad \checkmark$$

$$(۳) (r \Rightarrow p) \Rightarrow q \equiv \underbrace{(r \Rightarrow T)}_{\text{تبدیل به فعلی}} \Rightarrow F \equiv (\sim r \vee T) \Rightarrow F \equiv T \Rightarrow F \equiv F \quad \times$$

$$(۴) (r \Rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim p \equiv \underbrace{(r \Rightarrow T)}_{\text{تبدیل به فعلی}} \Rightarrow F \equiv (\sim r \vee T) \Rightarrow F \equiv T \Rightarrow F \equiv F \quad \times$$

۱۳- نمودار زیر، تعداد فروش یک کالا توسط یک بنگاه اقتصادی را با توجه به قیمت آن نشان می‌دهد. اگر هزینه تولید هر واحد از این کالا ۲۵ ریال و هزینه اولیه ۱۸ هزار ریال باشد، بنگاه این کالا را با چه قیمتی بفروشد تا بیشترین سود را به دست آورد؟



- (۱) ۳۵
(۲) ۳۲/۵
(۳) ۳۰
(۴) ۲۷/۵ ✓

رابطه بین N و P را باید بنویسیم. خط رسم شده از دو نقطه $A(۳۰, ۰)$ و $B(۰, ۱۸۰۰۰)$ می‌گذرد.

شیب را حساب کنیم:

$$m = \frac{۱۸۰۰۰ - ۰}{۰ - ۳۰} = \frac{۱۸۰۰۰}{-۳۰} = -۶۰۰$$

عرض از مبدا خط هم که ۱۸۰۰۰ است، پس معادله خط به صورت زیر است:

$$y = \underbrace{-۶۰۰}_{\text{شیب}} x + \underbrace{۱۸۰۰۰}_{\text{مبدأ}}$$

حالا x و y به ترتیب P و N قرار می‌دهیم:

$$N = -۶۰۰P + ۱۸۰۰۰$$

ازت دو بالا P را بر حسب N حساب کنیم:

$$۶۰۰P = ۱۸۰۰۰ - N \quad \div ۶۰۰ \quad P = ۳۰ - \frac{N}{۶۰۰}$$

• از ضرب قیمت فروش در تعداد کالا، درآمد به دست می‌آید:

$$R = N \left(۳۰ - \frac{N}{۶۰۰} \right) = ۳۰N - \frac{N^2}{۶۰۰}$$

• تابع هزینه را می‌نویسیم:

$$C = \underbrace{۱۸۰۰۰}_{\text{هزینه ثابت}} + \underbrace{۲۵}_{\text{تعداد}} \times \underbrace{N}_{\text{هزینه متغیر}} = ۱۸۰۰۰ + ۲۵N$$

• تابع سود را می‌نویسیم:

$$\text{سود} = \text{درآمد} - \text{هزینه} = \left(۳۰N - \frac{N^2}{۶۰۰} \right) - (۱۸۰۰۰ + ۲۵N) = \underbrace{\left(-\frac{1}{۶۰۰} \right)}_A N^2 + \underbrace{۵}_B N - \underbrace{۱۸۰۰۰}_C$$

به ازای طول رأس سود ماکزیمم می‌شود:

$$N_S = \frac{-B}{2A} = \frac{-۵}{2 \left(-\frac{1}{۶۰۰} \right)} = \frac{\frac{۵}{1}}{\frac{1}{۳۰۰}} = ۱۵۰۰$$

N بدست آمده را در رابطه $P = ۳۰ - \frac{N}{۶۰۰}$ قرار می‌دهیم تا قیمت بدست آید:

$$P = ۳۰ - \frac{۱۵۰۰}{۶۰۰} = ۳۰ - ۲٫۵ = ۲۷٫۵$$

۱۴- در یک شرکت هیچ کدام از کارکنان با حداقل حقوق ۸۰ میلیون ریالی زیر خط فقر نیستند. میانگین درآمد خانوارهای کشور حداکثر چند میلیون ریال است؟

۱۶۰ (۴) ✓

۱۲۰ (۳)

۸۰ (۲)

۴۰ (۱)

خط فقر برابر با نصف میانگین است: $\bar{x} = \frac{\bar{x}}{2}$ خط فقر

وقتی افراد با حقوق بالای ۸۰ میلیون ریال، زیر خط فقر نیستند، یعنی حداکثر خط فقر ۸۰ میلیون ریال بوده، $۸۰ \leq \text{خط فقر}$

$$\frac{\bar{x}}{2} \leq ۸۰ \xrightarrow{\times 2} \bar{x} \leq ۱۶۰$$

بماکنند $\frac{\bar{x}}{2}$ به جای خط فقر، داریم:

پس میانگین حداکثر ۱۶۰ میلیون ریال است.

۱۵- با حروف کلمه «پارسی» چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت به طوری که در نوشتن آن فقط یک حرف، نقطه دار ظاهر شود؟

۱۲ (۴)

۲۴ (۳) ✓

۳۶ (۲)

۷۲ (۱)

حروفی که می توانند نقطه بگیرند دو حرف هستند : پ : هر جایی کلمه که باشد
ی ، هر جایی که حرف آخر باشد

پس برای آن که نقطه یک حرف نقطه دار داشته باشیم باید حرف « ی » آخر باشد :

$$\frac{\text{اول}}{\text{آخر}} \times \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \times \overset{\text{ی}}{\uparrow}$$

پس ۴ حالت دیگر را باید با ۴ حرف بگیریم که به ترتیب ۱، ۲، ۳، ۴ حالت دارند :

$$\frac{\text{اول}}{\text{آخر}} \times \frac{۱}{\text{---}} \times \frac{۲}{\text{---}} \times \frac{۳}{\text{---}} \times \frac{۴}{\text{---}} = ۲۴$$

۱۶- حسن و علی قرار است هر کدام به ۳ سؤال از ۶ سؤالی که روی برگه‌ای نوشته شده، پاسخ دهند. به طوری که برای همه سؤالات پاسخ تهیه شود. با کدام احتمال شماره سؤالات حسن متوالی است؟

$\frac{1}{10}$ (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) ✓ $\frac{1}{20}$ (۳) $\frac{1}{40}$ (۴)

• ۳ سؤال از ۶ سؤال را برابر من انتخاب می‌کنم: $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}} = 20$

و از ۳ سؤال باقی‌مانده، ۳ سؤال برابر علی انتخاب می‌کنم: $\binom{3}{3} = 1$

پس تعداد کل حالات برابر است با: $n(S) = \binom{6}{3} \times \binom{3}{3} = 20 \times 1 = 20$

• تمام حالاتی که شماره سؤالات حسن متوالی می‌شود را بنویسیم، $A = \{123, 234, 345, 456\} \rightarrow n(A) = 4$

• پس احتمال وقوع رویداد A برابر است با: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

۱۷- در دنباله بازگشتی به صورت $a_{n+1} = \frac{1}{1+2a_n}$ جمله اول $\frac{3}{4}$ است. نسبت جمله دوم به جمله سوم کدام است؟

۰/۶ (۴)

۰/۶۴ (۳)

۰/۷ (۲)

۰/۷۲ (۱) ✓

در دنباله $a_{n+1} = \frac{1}{1+2a_n}$ ، با n به ترتیب ۱، ۲، ۳ تکرار می‌کنیم:

$$\bullet n=1: a_2 = \frac{1}{1+2a_1} = \frac{1}{1+2\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{1+\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{2}{2}+\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$\bullet n=2: a_3 = \frac{1}{1+2a_2} = \frac{1}{1+2\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{1}{1+\frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{5}{5}+\frac{4}{5}} = \frac{1}{\frac{9}{5}} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{9}} = \frac{2 \times 9}{5 \times 5} = \frac{18}{25} = \frac{18 \times 4}{25 \times 4} = \frac{72}{100} = 0.72$$

نسبت جمله دوم به سوم برابر است با:

۱۸- در یک سالن در ردیف اول ۸، در ردیف دوم ۱۲ و ردیف سوم ۱۶ صندلی قرار دارد. صندلی‌ها با همین نظم در ۱۲ ردیف چیده شده‌اند. اگر بخواهند این سالن را به دو سالن با نصف ظرفیت کنونی تفکیک کنند به طوری که در سالن‌های جدید چیدمان صندلی‌ها دارای همان نظم قبلی ولی با ۴ صندلی در ردیف نخست شروع شود، در سالن‌های جدید چند ردیف صندلی قرار دارد؟

۱۰ (۴)

۹ (۳) ✓

۸ (۲)

۶ (۱)

۸ و ۱۲ و ۱۶ و ...


تعداد صندلی‌های ردیف‌های سالن به صورت متناهی است:

اعداد ۸، ۱۲، ۱۶، ... یک دنباله حسابی با $a_1 = 8$ و $d = 4$ هستند که تعداد سالن $n = 12$ است.

مجموع سال را حساب کنیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \rightarrow S_{12} = \frac{12}{2} [2(8) + (12-1)(4)] = 6 [16 + 44] = 6 \times 60 = 360$$

هزینه ظرفیت کنونی برابر است با: $\frac{360}{2} = 180$

تعداد صندلی‌های در ردیف‌های سالن جدید به صورت متناهی است (ردیف اول ۴ تا و بعد از آن هم ۴ تا ۴ تا اضافه می‌شود):

۴، ۸، ۱۲، ...

مجموع جزیی اول دنباله حسابی با $(a_1 = 4 \text{ و } d = 4)$ برابر با ۱۸۰ است:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \rightarrow 180 = \frac{n}{2} [2(4) + (n-1)(4)] \rightarrow 180 = \frac{n}{2} [8 + 4n - 4] \Rightarrow$$

$$180 = \frac{n}{2} [4n + 4] \Rightarrow 180 = \frac{n}{2} [4(n+1)] \Rightarrow 180 = n [2(n+1)] \xrightarrow{\div 2} 90 = n(n+1)$$

حاصل ضرب دو عدد متوالی n و $n+1$ برابر با ۹۰ شده، پس n باید ۹ باشد.

۱۹- جملات سوم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۷ و ۴۹ هستند. جمله یازدهم این دنباله کدام است؟

- (۱) $343\sqrt{7}$ (۲) ۳۳۶ (۳) $49\sqrt{7}$ (۴) 343 ✓



جملات سوم، هفتم و یازدهم، a_3 ، a_7 و a_{11} با هم فاصله دارند:

چون فاصله بین a_n ها یکسان است، پس حاصل رابطه a_n در بین سه جمله موالی دنباله هندسی برقرار است. بین آن هم برقرار است:

$$(a_7)^2 = a_3 \times a_{11} \rightarrow 49^2 = 7 \times a_{11}$$

$$49^2 = 7 \times a_{11} \rightarrow 49^2 = 7 \times a_{11} \rightarrow a_{11} = \frac{49^2}{7} = 49^3 = 343$$

حاصل ۴۹ به توان ۳: $49^3 = 343$

۲۰- اگر $\frac{a^5 \times 15^3}{3^3 \times (\frac{a}{5})^5} = 5^{a+3}$ باشد، مقدار $f(2)$ در تابع $f(x) = \frac{1}{5}a^x - 1$ کدام است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱) ✓

دو عبارت را ساده کنیم و به جواب بگذاریم:

$$15^3 = (5 \times 3)^3 = 3^3 \times 5^3$$

$$\left(\frac{a}{5}\right)^5 = \frac{a^5}{5^5}$$

توضیح: دقت کنید با جواب بگذاریم، به صورت زیر:

$$\frac{a^5 \times 15^3}{3^3 \times (\frac{a}{5})^5} = 5^{a+3} \rightarrow \frac{a^5 \times 3^3 \times 5^3}{3^3 \times \frac{a^5}{5^5}} = 5^{a+3} \rightarrow \left(\frac{5^3 \times 5^5}{1}\right) = 5^{a+3} \xrightarrow[\text{تقریباً در نزدیک}]{\text{دور در دور}} 5^8 = 5^{a+3}$$

$$8 = a + 3 \rightarrow a = 5$$

پایه که برابرند، پس توان که باید برابر باشند:

با جواب بگذاریم $a = 5$ ، تابع f به شکل $f(x) = \frac{1}{5}(5^x) - 1$ می شود.

$$f(2) = \frac{1}{5}(5^2) - 1 = 5 - 1 = 4$$

جواب ۴ قرار می دهیم: ۲

نوین کنکور

کنکور

امتحان نهایی

**نوین کنکور
شرط لازم و کافی
برای موفقیت**

novinkonkor.com