

۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}x \Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \right)^2 x^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$S_{\text{مربع}} = x^2, \text{ وتر مثلث } x \Rightarrow x^2 = 2(\text{ضلع مثلث})^2 \Rightarrow (\text{ضلع مثلث})^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}(\text{ضلع مثلث})^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right)$$

$$\text{مساحت شکل سمت چپ: } S_{\text{مربع}} + 2S_{\text{مثلث}} = x^2 + \frac{x^2}{2}$$

$$\text{مجموع مساحت‌های دو شکل: } x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

$$\text{محیط دایره: } 2\pi r = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \right) (2\sqrt{2}) = \frac{4\pi}{\sqrt{2}\pi} \times \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\pi} = 4\sqrt{\pi}$$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

(۱) $A' \cap B'$ کل فضای خارج از ۲ دایره را دربر می‌گیرد.

(۲) $A \cup B$ کل فضای ۲ دایره را دربر می‌گیرد.

(۳) با توجه به نمودار، پاسخ صحیح همین گزینه است.

(۴) $A' \cup B'$ کل فضای نمونه می‌شود به جز $A \cap B$ و اجتماع آن با $(A \cap B)$ ، کل فضای نمونه (U) خواهد شد

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$5k, 5(k+1) \Rightarrow a = 5k + 5k + 5 = 10k + 5 \quad (*)$$

$$\frac{1}{5k} + \frac{1}{5(k+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2k+1}{k(k+1)} = \frac{5}{6} \Rightarrow k = 2$$

نکته: با توجه به اینکه $2 \times 3 = 6$ مقدار $k = 2$ را حدس می‌زنیم و گرنه ناچاریم که معادله درجه دوم

$$5k^2 - 7k - 6 = 0 \text{ را حل کنیم.}$$

$$\xrightarrow{(*)} a = 10 \times 2 + 5 = 25 \Rightarrow a \text{ مجموع ارقام} = 2 + 5 = 7$$

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 2x^3 - 3$$

$$f(\sqrt[3]{4}) = 2(\sqrt[3]{4})^3 - 3 = 2(4) - 3 = 5$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^3 - 3 = 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3 = \frac{1}{2} - 3 = \frac{1-6}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt[3]{4}) - f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = 5 - \left(-\frac{5}{2}\right) = 5 + \frac{5}{2} = 5 + 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$$

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x \Rightarrow b - a = ?$$

$$\text{زوج مرتب اول: } -1 = 1 - 2a^2 \Rightarrow -2 = -2a^2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$\text{زوج مرتب دوم: } a^2 - 3b = 2a + b + 1 \Rightarrow 4b = a^2 - 2a - 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \\ a = -1 \Rightarrow b = +\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{زوج مرتب سوم: } a + 6b = 4b^2 - a$$

$$a = 1, b = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \Rightarrow -2 = 0 \text{ نادرست}$$

$$a = -1, b = \frac{1}{2} \Rightarrow -1 + 6\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-1) \Rightarrow 2 = 2 \text{ درست}$$

$$\Rightarrow b - a = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

پس مقادیر $\begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ قابل قبول است.

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مجموعه B تک عضوی است یعنی تابع f، تابع ثابت است. اشتراک A با یک مجموعه تک عضوی، یا تهی است یا همان تک عضو. پس:

$$a \in A \cap B \Rightarrow f(x) = a$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = a = \frac{a}{a} - a \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow A: \left\{1, \frac{1}{2}, 2\right\} \Rightarrow 2 \in A$$

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: هرگاه مجموع دو عدد مقدار ثابتی باشد، حاصل ضربشان هنگامی Max می شود که دو عدد با هم برابر باشند.

$$S = \text{Max} \quad \text{عرض} = \text{طول} \Rightarrow 50 = \text{طول} + \text{عرض} \Rightarrow 100 = \text{محیط مستطیل}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 4x \Rightarrow 2x + \frac{4x}{2} = 4x = 50 \Rightarrow x = \frac{50}{4} = 12\frac{1}{2}$$

روش دوم: تشکیل معادله درجه دوم و استفاده از $x_S = -\frac{b}{2a}$ برای پیدا کردن مقدار Max.

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: هزینه برق مصرفی برابر است با مساحت زیر نمودار.

$$\text{ریال } 244/000 = 131100 + 61500 + 51400 = 1311 \times (300 - 200) + x \times (200 - 100) + 514 \times (100 - 0)$$

۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: با توجه به متن کتاب درسی پایه دهم، هر نقطه یا دایره در نمودار حبابی در واقع یک سه تایی مرتب به صورت (V_1, V_2, V_3) را مشخص می‌کند که در آن داریم:

V_2 : موقعیت نقطه روی محور عمودی

V_1 : موقعیت نقطه روی محور افقی

V_3 : اندازه نقطه (مساحت دایره)

$$r = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow S = \pi \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right)^2 = \pi \times \frac{4}{\pi} = 4$$

پس مختصات متغیر سوم، عدد ۴ است که در بین گزینه‌ها تنها گزینه ۱ چنین است.

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته ۱: به طرفین تساوی می‌توان مقداری را اضافه یا کم کرد.

نکته ۲: در طرفین تساوی می‌توان مقداری (مخالف صفر) را ضرب یا تقسیم کرد.

وقتی طرفین تساوی را در عبارت $(x - 5)$ ضرب می‌کنیم در واقع داریم جواب $x = 5$ را هم به معادله اضافه می‌کنیم مگر اینکه فرض کنیم $x \neq 5$ که در این صورت گام پنجم ایراد خواهد داشت که طرفین را بر $x - 4$ تقسیم کرده است.

تذکر: در استدلال داده شده، در گام ۱ بیان نشده که $x \neq 5$ پس ایراد استدلال در واقع همان گام یکم است. ولی منظور طراح سؤال قطعاً گزینه ۳ بوده و سازمان سنجش نیز گزینه ۳ را به عنوان پاسخ صحیح اعلام کرده است.

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. گزاره شرطی تنها در صورتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد پس:

$$r \Rightarrow (q \vee \sim p) \equiv F \Rightarrow \begin{cases} r \equiv T \\ q \vee \sim p \equiv F \Rightarrow \begin{cases} q \equiv F \\ p \equiv T \end{cases} \end{cases}$$

پس r و p گزاره‌هایی درست و q گزاره‌ای نادرست است. بررسی گزاره‌ها:

۱) $r \Rightarrow p \equiv T \Rightarrow T \equiv T$

۲) $p \Rightarrow r \equiv T \Rightarrow T \equiv T$

۳) $q \Rightarrow p \equiv F \Rightarrow T \equiv T$ (به انتفاء مقدم)

۴) $p \Rightarrow q \equiv T \Rightarrow F \equiv F$ (هم‌ارزش با گزاره صورت سؤال)

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\bar{x}_A = 13 = \frac{(3x_1 - 5) + (3x_2 - 5) + \dots + (3x_{20} - 5)}{20}$$

$$\Rightarrow 260 = 3(x_1 + x_2 + \dots + x_{20}) - (20 \times 5) = 3 \sum_{i=1}^{20} x_i - 100$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{360}{3} = 120 \quad (*)$$

یعنی مجموع x_1 تا x_{20} برابر ۱۲۰ است.

$$\bar{x}_B = \frac{\frac{x_1+4}{5} + \frac{x_2+4}{5} + \dots + \frac{x_{20}+4}{5}}{20} = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{20}) + (4 \times 20)}{5 \times 20}$$

$$\Rightarrow \bar{x}_B = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{20}) + 80}{100} \xrightarrow{(*)} = \frac{120 + 80}{100} = 2$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\delta^2 = 9 = \frac{(\bar{x} - x_1)^2 + \dots + (\bar{x} - x_{30})^2}{30} \Rightarrow (\bar{x} - x_1)^2 + \dots + (\bar{x} - x_{30})^2 = 270$$

۱۰ درصد ۳۰ داده یعنی ۳ داده. فرض کنیم داده‌های x_{29} و x_{28} برابر $\bar{x}$ هستند. در آن صورت خواهیم داشت:

$$(\bar{x} - x_1)^2 + \dots + (\bar{x} - x_{27})^2 + 0 + 0 + 0 = 270 \quad (*)$$

وقتی این ۳ داده را کنار بگذاریم، انحراف معیار جدید برابر خواهد بود با:

$$\delta_{\text{جدید}}^2 = \frac{(\bar{x} - x_1)^2 + \dots + (\bar{x} - x_{27})^2}{27} \xrightarrow{(*)} = \frac{270}{27} = 10$$

۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. داده‌ها را مرتب می‌کنیم (به جز a):
با توجه به اینکه تعداد داده‌ها ۹ تا است پس میانه، داده پنجم خواهد بود.

$$\bar{x} = \frac{1+3+4+6+7+8+8+9+a}{9} = \frac{46+a}{9}$$

با سعی و خطا به این نتیجه می‌رسیم که داده a از کل داده‌ها باید بزرگتر باشد تا تساوی میانه و میانگین رخ دهد. در این حالت:

$$\text{میانه} = 7 = \frac{46+a}{9} \Rightarrow a = 63 - 46 = 17$$

پس خط فقر برابر است با نصف میانه (میانگین):
 $\frac{7}{2} = 3.5$ میلیون

در بین داده‌ها دو کارمند با حقوق ۱ و ۳ میلیون تومان زیر خط فقر قرار دارند.

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. یکی از سه حالت زیر رخ خواهد داد:

الف) حرف «آ» در ابتدای کلمه باشد:

$$\overline{5} \overline{4} \overline{3} \overline{2} \overline{1} \overline{1} : \overline{5}! \times 1 = 120$$

ب) حرف «آ» دومین حرف کلمه باشد:

$$\overline{4} \overline{3} \overline{2} \overline{1} \overline{1} \overline{2} : \overline{4}! \times 2 = 48$$

ج) حرف «آ» سومین حرف کلمه باشد:

$$\overline{3} \overline{2} \overline{1} \overline{1} \overline{2} \overline{1} : \overline{3}! \times 2 = 12$$

$$\Rightarrow 120 + 48 + 12 = 180$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد اعداد دو رقمی که با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌توان نوشت:

$$\overline{4} \overline{4} = 4 \times 4 = 16$$

$$n(S) = 16$$

از بین این ۱۶ عدد، اعداد $\{44, 42, 32, 24, 12\}$ مضرب ۴ یا ۶ هستند.

$$n(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{5}{16}$$

۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$a_1 = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1, \quad a_3 = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$$

$$b_1 = -3a_1 = -3(-1) = +3$$

$$a_2 = 2^2 - 2 = 2 \quad \text{زوج}$$

$$b_2 : \xrightarrow{\text{ضابطه دوم}} b_2 = 3b_1 + 1 = 3(3) + 1 = 10$$

$$a_3 = 7 \quad \text{فرد}$$

$$b_3 : \xrightarrow{\text{ضابطه اول}} b_3 = \frac{1}{2}b_2 = \frac{1}{2}(10) = 5$$

جایگذاری مقادیر به دست آمده در رابطه خواسته شده:

$$a_3 \times b_3 + a_1 \times b_2 = 7 \times 5 + (-1) \times 10 = 35 - 10 = 25$$

$$a_{11} + a_{19} = 144$$

$$m + n = k + j \Rightarrow a_m + a_n = a_k + a_j$$

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: (قانون اندیس‌ها)

با توجه به نکته و فرض سؤال خواهیم داشت:

$$a_{11} + a_{19} = a_{15} + a_{15} = 2a_{15} = 144 \Rightarrow a_{15} = \frac{144}{2} = 72$$

روش دوم (بدون استفاده از قانون اندیس‌ها):

دنباله خطی ← دنباله حسابی

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} = a_1 + 10d \\ a_{19} = a_1 + 18d \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 2a_1 + 28d = 144$$

طرفین تساوی فوق را بر ۲ تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$a_1 + 14d = \frac{144}{2} = 72 \xrightarrow{a_1 + 14d = a_{15}} a_{15} = 72$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دنباله با رابطه بازگشتی $a_{n+1} = ra_n$ همان دنباله هندسی است.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = -9\sqrt{3} \\ a_3 = 9 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = r = \frac{9}{-9\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{-9\sqrt{3}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = +9 \times 3 = 27$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_8 = 27 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^7 = \frac{-27}{(\sqrt{3})^6 \times \sqrt{3}} = \frac{-27}{3^3 \times \sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x^5 \times 5^{\frac{2}{6}} \times 15^{\frac{9}{3}}}{5^{\frac{6}{4}} \times \left(\frac{5}{3}\right)^2} = 35 \times 75 \Rightarrow \frac{x^5 \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^3 \times 3^3}{5^{\frac{3}{2}} \times 5^2 \times 3^{-2}} = 35 \times 75 \Rightarrow \frac{x^5 \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^3 \times 3^3}{5^{\frac{3}{2}} \times 5^2 \times 3^{-2}} = 35 \times 75$$

$$\Rightarrow x^5 = 75 \Rightarrow x = 7$$