

۱- با ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی به ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنباله حسابی به دست می آید. اگر مجموع مربعات سه جمله هندسی برابر مجموع جملات حسابی باشد، جمله اول دنباله هندسی کدام است؟

$$\frac{۴۸}{۵} \quad (۴) \quad \frac{۲۴}{۵} \quad (۳) \quad \frac{۶۴}{۷} \quad (۲) \quad \frac{۳۲}{۷} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه (۲)

$$a, aq, aq^2 \longrightarrow ۴a, ۸aq, ۱۶aq^2 \longrightarrow ۲(۸aq) = ۴a + ۱۶aq^2 \xrightarrow{\div ۴a} ۴q^2 - ۴q + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}}$$

$$a^2 + (aq)^2 + (aq^2)^2 = ۴a + ۸aq + ۱۶aq^2 \xrightarrow{q = \frac{1}{2}} a^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) = ۴a(1 + 1 + 1) \Rightarrow a = \frac{۱۲ \times ۱۶}{۲۱} \Rightarrow \boxed{a = \frac{۶۴}{۷}}$$

۲- رأس سهمی $y = kx^2 - ۴x - ۶$ روی خط $y = -۴x - ۴$ قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟

$$-۸ \quad (۴) \quad -۴ \quad (۳) \quad ۶ \quad (۲) \quad ۲ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه (۴)

$$A(x_0, y_0) \longrightarrow y_0 = -۴(x_0) - ۴ \Rightarrow \boxed{y_0 + ۴(x_0) = -۴} \quad (۱) \quad ; \quad x_0 = \frac{-(-۴)}{۲k} \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{۲}{k}} \quad (۲)$$

$$y_0 = k(x_0)^2 - ۴(x_0) - ۶ \xrightarrow{(۱)} -۴ = k(x_0)^2 - ۶ \xrightarrow{(۲)} ۲ = k\left(\frac{۲}{k}\right)^2 \Rightarrow \boxed{k = ۲} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -۸ \end{cases}$$

۳- اگر A, B و C سه مجموعه ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه $((A - B)' - (B - C)) - C$ با کدام

مجموعه برابر است؟

$$(A' \cup B') - C \quad (۴) \quad C - (A \cup B) \quad (۳) \quad B - (A \cup C) \quad (۲) \quad A' - (B \cup C) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه (۱)

$$\begin{aligned} ((A - B)' - (B - C)) - C &= ((A \cap B')' \cap (B \cap C')') \cap C' \\ &= (A' \cup B) \cap \underbrace{(B' \cup C) \cap C'}_{\emptyset} = (A' \cup B) \cap ((B' \cap C') \cup \underbrace{(C \cap C')}_{\emptyset}) \\ &= \underbrace{(A' \cup B) \cap B'}_{\emptyset} \cap C' = ((A' \cap B') \cup \underbrace{(C \cap C')}_{\emptyset}) \cap C' \\ &= (A' \cap B') \cap C' = A' \cap (B' \cap C') = \boxed{A' - (B \cup C)} \end{aligned}$$



۴- کدام گزاره زیر هم‌ارز منطقی گزاره $[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ است؟

- (۱) q (۲) r (۳) $r \vee p$ (۴) $p \vee q$

پاسخ: گزینه (۲)

$$[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) = [(\sim p \wedge \sim q) \wedge r] \vee \underbrace{(q \wedge r) \vee (p \wedge r)}$$

$$[\sim (p \vee q) \wedge r] \vee [(p \vee q) \wedge r] = \left[\underbrace{(\sim (p \vee q) \vee (p \vee q))}_{\text{T}} \wedge r \right] = \boxed{r}$$

۵- معادله‌های $x^2 + 6x + m = 0$ و $x^2 + 2x - 3m = 0$ یک ریشه مشترک غیر صفر دارند. اختلاف ریشه‌های

غیر مشترک کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۷

پاسخ: گزینه (۳)

$$\begin{aligned} \boxed{x=\alpha} &\rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + 6\alpha + m = 0 \\ \alpha^2 + 2\alpha - 3m = 0 \end{cases} \xrightarrow{-} 4\alpha + 4m = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = -m} \Rightarrow m^2 - 6m + m = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 5 \end{cases} \\ m = 5 &\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + 6\alpha + 5 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = -1}, \boxed{\alpha = -5} \\ \alpha^2 + 2\alpha - 15 = 0 \rightarrow \boxed{\alpha = 3}, \boxed{\alpha = -5} \end{cases} \rightarrow \boxed{3 - (-1) = 4} \end{aligned}$$

۶- نمودار تابع $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ ، به ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y = 0$ و $y = -2$ واقع می‌شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه (۴)

$$-2 < y < 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} < 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \\ -2 \leq \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \Rightarrow 0 \leq \frac{2x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \boxed{\emptyset}$$



۷- نقاط $A(0, 1)$ و $B(4, -2)$ دو رأس مجاور مربع $ABCD$ هستند. طول مختصات نقطه D در ربع سوم، کدام است؟

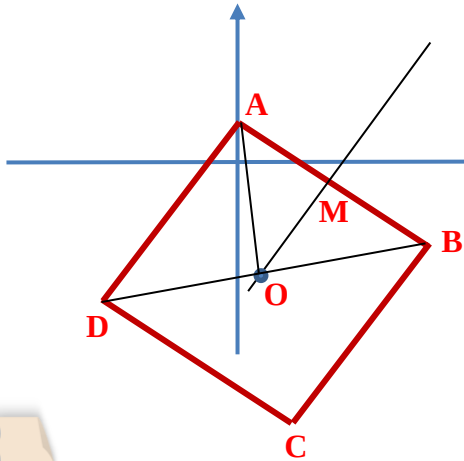
۴) -۴

۳) -۳

۲) -۲

۱) -۱

پاسخ: گزینه (۳)



$$AB = \sqrt{4^2 + (-2-1)^2} = 5 ; AC = 5\sqrt{2} \Rightarrow OA = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

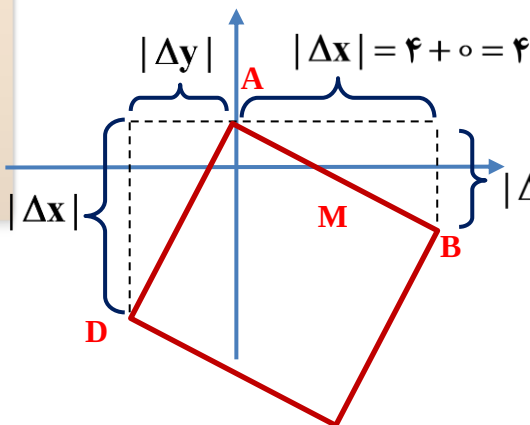
$$m_{AB} = \frac{-2-1}{4-0} = -\frac{3}{4} \Rightarrow m_{OH} = \frac{4}{3} ; M\left(\frac{4+0}{2}, \frac{-2+1}{2}\right) \Rightarrow M\left(2, -\frac{1}{2}\right)$$

$$OM: y - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}(x - 2) \xrightarrow{O(\alpha, \beta) \in OM} \beta = \frac{4}{3}\alpha - \frac{19}{6}$$

$$OA = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 0)^2 + \left(1 - \frac{4}{3}\alpha + \frac{19}{6}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = 0/5 \rightarrow \beta = -2/5 \\ \alpha = 3/5 \end{cases}$$

$$O = \frac{B+D}{2} \Rightarrow D = 2O - B \Rightarrow D(-3, -3)$$



$$\begin{cases} x_D = x_B - (\Delta x + \Delta y) = 4 - (3 + 4) \rightarrow x_D = -3 \\ y_D = y_A - (\Delta y) = 1 - (4) \rightarrow y_D = -3 \end{cases}$$

روش ۲:

۸- توابع $f(x) = \log(2x - 5)$ و $g(x) = x + \sqrt{2x - 4}$ را در نظر بگیرید. اگر نمودار $y = g^{-1} \circ f^{-1}$ محور y ها را در α قطع کند، مقدار α کدام است؟

۴) $4 + \sqrt{3}$

۳) $4 + \sqrt{2}$

۲) $4 - \sqrt{3}$

۱) $4 - \sqrt{2}$

پاسخ: گزینه (۲)

$$y(0) = \alpha \rightarrow \alpha = g^{-1}(f^{-1}(0)) \xrightarrow{(1)} \alpha = g^{-1}(3) \xrightarrow{(2)} \alpha = 4 - \sqrt{3}$$

$$f^{-1}(0) \Rightarrow 0 = \log(2x - 5) \rightarrow 2x - 5 = 1 \rightarrow x = 3 \quad (1)$$

$$3 = x + \sqrt{2x - 4} \Rightarrow (3 - x)^2 = (\sqrt{2x - 4})^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 - \sqrt{3} \\ x = 4 + \sqrt{3} \end{cases} \quad (2)$$



۹- نمودار $f(x) = 2 + 2^{b-ax}$ نمودار تابع $g(x) = -x^2 - 3x + 8$ را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. اگر

$f^{-1}(10) = -1$ باشد، مقدار $2b - a$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) -۲

پاسخ: گزینه (۱)

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \rightarrow 2 + 2^{b-a} = -1 - 3 + 8 \rightarrow \boxed{b-a=1} \\ f^{-1}(10) = -1 \rightarrow 10 = 2 + 2^{b+a} \rightarrow \boxed{b+a=3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=1 \end{cases} \rightarrow \boxed{2b-a=3}$$

۱۰- معادله $\frac{1}{x+2} - \frac{x^2-9x-2}{x^2+8} = \frac{6x}{x^2-2x+4}$ دارای چند جواب مثبت است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه (۴)

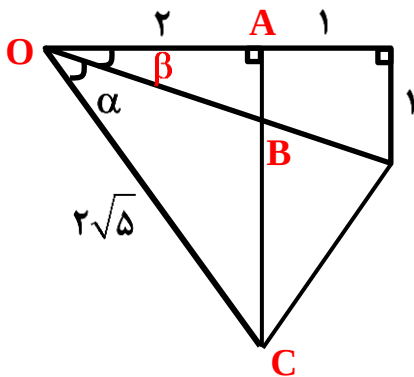
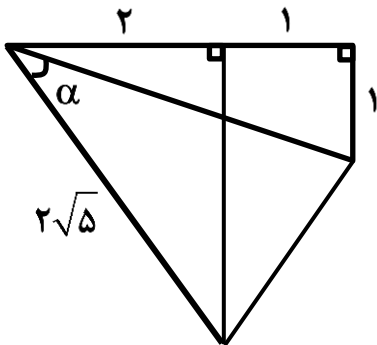
$$\frac{x^2-2x+4-(x^2-9x-2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{6x}{x^2-2x+4} \Rightarrow 8x+6=6x^2+12x \rightarrow$$

$$6x^2+5x-6=0 \xrightarrow{\frac{c}{a}=-1<0} \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$$

۱۱- در شکل زیر، مقدار $\cos \alpha$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{3}}{10}$ (۴) $-\frac{\sqrt{2}}{10}$

پاسخ: گزینه (۲)



تالس: $\frac{AB}{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{AB = \frac{2}{3}}$; $OB^2 = 4 + \frac{4}{9} \rightarrow \boxed{OB = \frac{\sqrt{40}}{3}}$

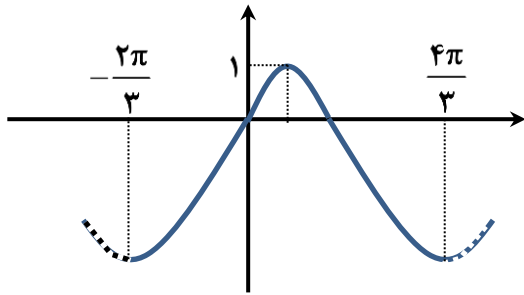
$AC^2 = (2\sqrt{5})^2 - 2^2 \rightarrow \boxed{AC = 4}$

$\cos \alpha = \cos((\alpha + \beta) - \beta) \rightarrow \cos \alpha = \cos(\alpha + \beta)\cos \beta + \sin(\alpha + \beta)\sin \beta$

$\cos \alpha = \frac{2}{2\sqrt{5}} \times \frac{2}{2\sqrt{10}} + \frac{4}{2\sqrt{5}} \times \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} + \frac{2}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$



۱۲- شکل زیر، قسمتی از نمودار $y = a + b \cos(cx - \frac{\pi}{3})$ را نشان می‌دهد. مقدار $b(c - a)$ کدام است؟



(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۶

پاسخ: گزینه (۳)

تابع به اندازه $\frac{\pi}{3}$ به راست منتقل شده و بنابراین چون تابع کسینوس پس از محور y نزولی بوده، پس $b > 0$ است.

$$T = \frac{2\pi}{c} \rightarrow \frac{4\pi}{3} - (-\frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{c} \rightarrow \boxed{c=1} ; (0,0) \in f(x) \Rightarrow 0 = a + b \cos(-\frac{\pi}{3}) \rightarrow \boxed{a = -\frac{b}{2}} \quad (1)$$

$$y_{\max} = |b| + a \xrightarrow{b>0} \boxed{b+a=1} \xrightarrow{(1)} b - \frac{b}{2} = 1 \rightarrow \boxed{b=2}, \boxed{a=-1} ; \boxed{b(c-a)=4}$$

۱۳- مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos(\frac{17\pi}{8} + x) \cos(\frac{3\pi}{8} - x) = \cos^2(\frac{\pi}{3})$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

(۴) $\frac{\pi}{4}$

(۳) $\frac{2\pi}{3}$

(۲) $\frac{\pi}{3}$

(۱) $\frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه (۴)

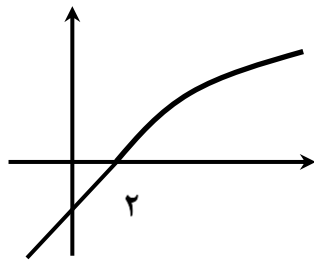
$$\begin{cases} \cos(\frac{17\pi}{8} + x) = \cos(\frac{16\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + x) = \cos(\frac{\pi}{8} + x) \\ \cos(\frac{3\pi}{8} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{3\pi}{8} - x)) = \sin(\frac{\pi}{8} + x) \end{cases} \rightarrow \cos(\frac{\pi}{8} + x) \sin(\frac{\pi}{8} + x) = \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \sin(2(\frac{\pi}{8} + x)) = \frac{1}{4} \rightarrow \sin(\frac{\pi}{4} + 2x) = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{24} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{24}} \\ \frac{\pi}{4} + 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{24}} \end{cases} \rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4}}$$



۱۴- اگر $f(x) = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right|$ و شکل زیر نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x+2))) = 0$ چند ریشه دارد؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

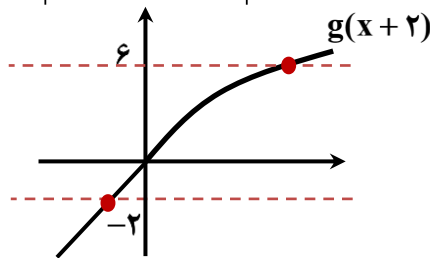
۴ (۴)

پاسخ: گزینه (۲)

از نمودار متوجه می شویم که $g(2) = 0$ است. پس داریم:

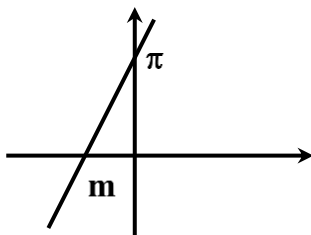
$$g(f(g(x+2))) = 0 \xrightarrow{g(2)=0} f(g(x+2)) = 2 \rightarrow \left| \frac{1}{2}g(x+2) - 1 \right| = 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}g(x+2) - 1 = 2 \Rightarrow g(x+2) = 6 \rightarrow \\ \frac{1}{2}g(x+2) - 1 = -2 \Rightarrow g(x+2) = -2 \rightarrow \end{cases}$$



با توجه به نمودار $g(x+2)$
معادله ۲ ریشه دارد.

۱۵- شکل زیر، نمودار تابع f^{-1} را نشان می دهد. اگر معادله $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \pi$ باشد، مقدار m کدام است؟



$-\sqrt{\pi}$ (۱)

$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (۲)

$-\frac{1}{\pi}$ (۳)

$-\pi\sqrt{\pi}$ (۴)

پاسخ: گزینه (۱)

شیب: $a_{f^{-1}} = \frac{\pi}{m} \xrightarrow{m < 0} \boxed{f^{-1}(x) = \frac{\pi}{m}(x - \pi)} ; \boxed{f(x) = \frac{m}{\pi}x + \pi}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{m}(x - \pi)}{\frac{m}{\pi}x + \pi} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{m}}{\frac{m}{\pi}} = \frac{\pi^2}{m^2} = \pi \Rightarrow m^2 = \pi \rightarrow \begin{cases} m = -\sqrt{\pi} \\ m = \sqrt{\pi} \end{cases}$$



۱۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} |x - [x]| & ; \text{زوج } [x] \\ |x - [x - a]| & ; \text{فرد } [x] \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مجموعه مقادیر $[a]$ شامل چند عضو است؟

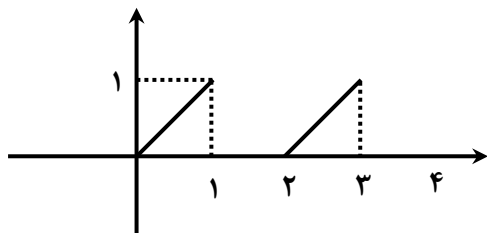
- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱ ($a < -1$)

پاسخ: گزینه (۱)

برای اعداد بین صفر و ۱ داریم: $0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow f(x) = |x|$

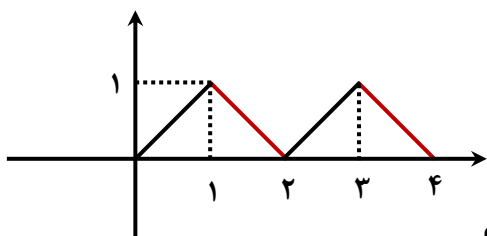
برای اعداد بین ۲ و ۳ داریم: $2 \leq x < 3 \rightarrow [x] = 2 \rightarrow f(x) = |x - 2|$

پس شکل تابع برای براکت‌های زوج چنین است:



چون تابع پیوسته است پس باید براکت‌های فرد به شکل زیر شود:

و این یعنی $f(1) = 1$ شود و داریم:



$$f(1) = 1 \Rightarrow |1 - [1 - a]| = 1 \rightarrow | -[-a]| = 1 \rightarrow \begin{cases} [-a] = 1 \\ [-a] = -1 \end{cases} \xrightarrow{a < -1} \emptyset$$

۱۷- تابع $f(x) = \frac{x}{1 - x|x|}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه (۲)

$$\begin{cases} x \geq 0 \rightarrow f(x) = \frac{x}{1 - x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{1 - x^2 + 2x^2}{1 - x^2} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \rightarrow \text{در این بازه، نقطه بحرانی ندارد.} \\ x < 0 \rightarrow f(x) = \frac{x}{1 + x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{1 + x^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \rightarrow \boxed{x = -1} \end{cases}$$

فقط یک نقطه بحرانی

در صفر هم تابع مشتق پذیر است و مشتق در صفر برابر صفر نمی شود، پس صفر بحرانی نیست.



۱۸- به ازای کدام مقدار a ، اختلاف شیب نیم خط‌های مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x) = |4x - 3|\sqrt{ax}$ در نقطه $x = \frac{3}{4}$ برابر $2\sqrt{6}$ می‌شود؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه (۳)

$$\begin{cases} x > \frac{3}{4} \rightarrow f(x) = (4x - 3)\sqrt{ax} \rightarrow f'(x) = 4\sqrt{ax} + \frac{a}{2\sqrt{ax}}(4x - 3) \rightarrow f'_+\left(\frac{3}{4}\right) = 2\sqrt{3a} + 0 \\ x < \frac{3}{4} \rightarrow f(x) = (-4x + 3)\sqrt{ax} \rightarrow f'(x) = -4\sqrt{ax} + \frac{a}{2\sqrt{ax}}(-4x + 3) \rightarrow f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = -2\sqrt{3a} + 0 \end{cases}$$

$$f'_+\left(\frac{3}{4}\right) - f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = 2\sqrt{6} \rightarrow 2\sqrt{3a} - (-2\sqrt{3a}) = 2\sqrt{6} \rightarrow 2\sqrt{3a} = \sqrt{6} \xrightarrow{()^2} 12a = 6 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$$

۱۹- نمودار تابع $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + (2 - m)x + 5$ محور x ها را در α و β قطع می‌کند. اگر مجموع α و β بیشترین مقدار باشد، m کدام است؟

- (۱) $2 + \sqrt{5}$ (۲) $2 + \sqrt{3}$ (۳) $2 - \sqrt{5}$ (۴) $2 - \sqrt{3}$

پاسخ: گزینه (۴)

$$\Delta > 0 \rightarrow (2 - m)^2 - 4 \cdot (m^2 - 1) > 0 \rightarrow -19m^2 - 4m + 24 > 0$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = \frac{m - 2}{m^2 - 1} \rightarrow S = \frac{m^2 - 1 - 2m(m - 2)}{m^2 - 1} = 0 \rightarrow -m^2 + 4m - 1 = 0 \rightarrow$$

$$m^2 - 4m + 1 = 0 \rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} \rightarrow \begin{cases} \boxed{m = 2 - \sqrt{3}} \rightarrow \Delta > 0 \\ m = 2 + \sqrt{3} \rightarrow \Delta < 0 \end{cases}$$

۲۰- ۵ نفر قرار است در یک جلسه سخنرانی کنند. در چند حالت، دو نفر خاص پشت سر هم سخنرانی می‌کنند؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۴۸ (۳) ۷۲ (۴) ۹۶

پاسخ: گزینه (۲)

$$\boxed{a} \boxed{bc} \boxed{d} \boxed{e} \rightarrow \boxed{4! \times 2! = 48}$$



۲۱- در پرتاب همزمان دو تاس، اعداد رو شده m و n هستند. با کدام احتمال، معادله $x^2 - mx + n = 0$ دارای دو ریشه حقیقی و متمایز است؟

$$\frac{4}{9} \text{ (۴)} \quad \frac{5}{6} \text{ (۳)} \quad \frac{1}{4} \text{ (۲)} \quad \frac{1}{3} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه (--)

$$n(S) = 6 \times 6 = 36 \quad ; \quad x^2 - mx + n = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} m^2 - 4n > 0$$

$$A = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), \dots, (5,6), (6,1), \dots, (6,6)\} \rightarrow n(A) = 17 \rightarrow \boxed{P(A) = \frac{17}{36}}$$

۲۲- پیشامدهای ناسازگار A و B از فضای نمونه‌ای S هستند. اگر $P(A) = \frac{1}{6}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $P(B' | A')$ کدام است؟

$$0/75 \text{ (۴)} \quad 0/55 \text{ (۳)} \quad 0/5 \text{ (۲)} \quad 0/7 \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه (۱)

$$P(B' | A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - (\frac{1}{6} + \frac{1}{4})}{1 - (\frac{1}{6})} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{6}} = 0/7$$

۲۳- در یک دسته از اعداد، چهار عدد فرد یک رقمی در اختیار داریم. دوتای آنها را با کوچک‌ترین عدد زوج بعد از خود و دوتای دیگر را با بزرگ‌ترین عدد زوج قبل از خود جایگزین می‌کنیم به طوری که اعداد در دسته دوم (دسته جدید) تک رقمی و غیرتکراری باشند. نسبت ضریب تغییرات دسته اول به دسته دوم کدام است؟

$$1/25 \text{ (۴)} \quad \sqrt{2} \text{ (۳)} \quad 0/4\sqrt{10} \text{ (۲)} \quad 0/2\sqrt{5} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه (۳)

۵ نباید در دسته اول باشد زیرا باعث می‌شود در دسته دوم عدد تکراری ساخته شود، بنابراین داریم:

$$A = \{1, 3, 7, 9\}; \bar{x}_A = \frac{1+3+7+9}{4} = 5; \sigma^2 = \frac{(1-5)^2 + (3-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2}{4} = 10; \boxed{C_v = \frac{\sqrt{10}}{5}}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}; \bar{x}_B = \frac{2+4+6+8}{4} = 5; \sigma^2 = \frac{(2-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2}{4} = 5; \boxed{C_v = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$\frac{C_{vA}}{C_{vB}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \boxed{\sqrt{2}}$$



۲۴- سه کیسه یکسان، هر کدام شامل ۱۰ گوی در اختیار داریم. کیسه اول دارای گوی‌های سبز، کیسه دوم دارای گوی‌های قرمز و کیسه سوم دارای ۲ گوی قرمز و ۸ گوی سبز است. کیسه‌ای به تصادف انتخاب کرده، یک گوی خارج می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است. با کدام احتمال همه گوی‌های آن کیسه قرمز است؟

$$\frac{1}{3} \quad (۱) \quad \frac{2}{3} \quad (۲) \quad \frac{1}{6} \quad (۳) \quad \frac{5}{6} \quad (۴)$$

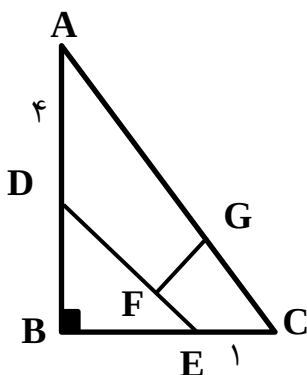
پاسخ: گزینه (۴)

$$P(R) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{10}$$

$$P(A_1 \cap R) \quad P(A_2 \cap R) \quad P(A_3 \cap R)$$

$$; P(A_3 | R) = \frac{P(A_3 \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times \frac{12}{10}} = \frac{5}{6}$$

۲۵- در شکل زیر، اگر $\frac{AG}{CG} = \frac{DE}{EF} = 4$ باشد، اندازه FG کدام است؟



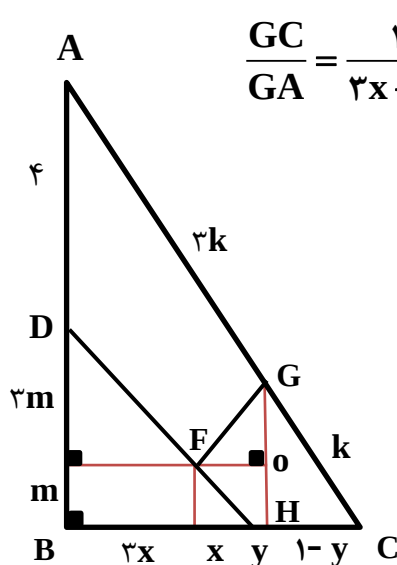
۱ (۱)

۱/۲۵ (۲)

۱/۵ (۳)

۱/۷۵ (۴)

پاسخ: گزینه (۲)



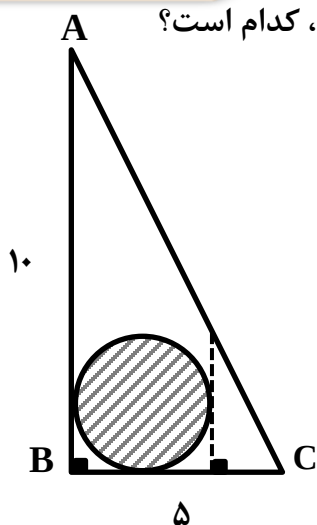
$$\frac{GC}{GA} = \frac{1-y}{3x+x+y} \rightarrow \frac{k}{4k} = \frac{1-y}{4x+y} \rightarrow 4x+y = 3-4y \rightarrow x+y = \frac{3}{4} \rightarrow FO = \frac{3}{4}$$

$$\frac{GH}{AB} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{GH}{4+4m} = \frac{1}{4} \rightarrow GH = 1+m \xrightarrow{GH=GO+OH, OH=m} GO = 1$$

$$FG^2 = FO^2 + GO^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \rightarrow FG = 1/25$$



۲۶- اگر اندازه اضلاع قائم مثلث ABC، ۵ و ۱۰ باشد، مساحت ناحیه هاشور خورده، کدام است؟



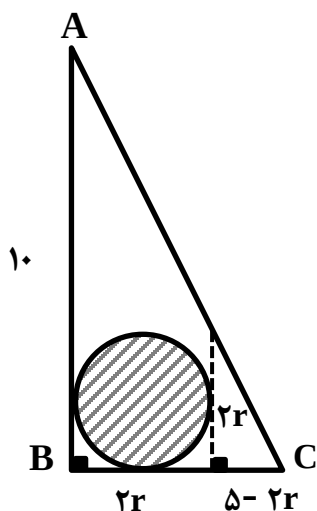
(۱) $\frac{25}{9}\pi$

(۲) $\frac{16}{9}\pi$

(۳) $\frac{9}{4}\pi$

(۴) $\frac{5}{4}\pi$

پاسخ: گزینه (۱)



تالس: $\frac{2r}{10} = \frac{5-2r}{5} \Rightarrow 2r = 10 - 4r \longrightarrow \boxed{r = \frac{5}{3}}$

$S = \pi r^2 \longrightarrow \boxed{S = \frac{25}{9}\pi}$

۲۷- در یک n ضلعی با کم شدن یک ضلع، ۱۶ قطر از تعداد قطرهای آن کم می شود. اگر دو ضلع کم شود، چند قطر از تعداد قطرهای آن کم می شود؟

(۴) ۳۳

(۳) ۳۲

(۲) ۳۱

(۱) ۳۰

پاسخ: گزینه (۲)

تعداد قطر n ضلعی: $\frac{n(n-3)}{2}$; $\frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-1)(n-4)}{2} = 16 \rightarrow \boxed{n = 18}$

$\frac{18(18-3)}{2} - \frac{16(16-3)}{2} = 135 - 104 = \boxed{31}$



۲۸- در فضا، دو خط ℓ_1 و ℓ_2 موازی هستند. اگر خط d خط را در یک نقطه قطع کند، کدام مورد در خصوص وضعیت خط d و ℓ_2 همواره درست است؟

- (۱) متناظرند. (۲) موازی اند. (۳) غیرمتقاطع اند. (۴) غیرموازی اند.

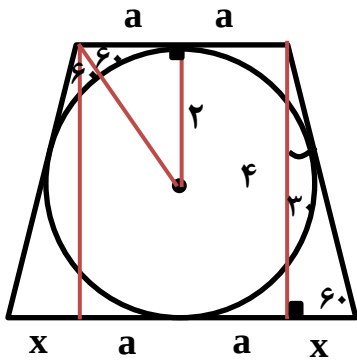
پاسخ: گزینه (۴)

قطعاً غیر موازی اند، ولی ممکن است متناظر، متقاطع و یا غیرمتقاطع باشند.

۲۹- یک دایره به شعاع ۲، داخل دوزنقه متساوی الساقینی محاط شده است. اگر یکی از زوایای دوزنقه ۶۰ درجه باشد، مساحت این دوزنقه کدام است؟

- (۱) $\frac{12}{\sqrt{3}}$ (۲) $\frac{16}{\sqrt{3}}$ (۳) $\frac{24}{\sqrt{3}}$ (۴) $\frac{32}{\sqrt{3}}$

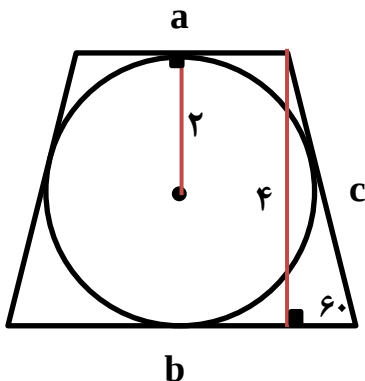
پاسخ: گزینه (۴)



$$\tan 30^\circ = \frac{x}{4} \Rightarrow x = \frac{4}{\sqrt{3}} ; \tan 60^\circ = \frac{2}{a} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{(2a + (2a + 2x)) \times 4}{2} = (2a + x) \times 4 \rightarrow S = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

روش ۲: در دوزنقه متساوی الساقین محیطی، اگر a و b طول قاعده کوچک و قاعده بزرگ باشند، مساحت برابر با



$$S = \frac{a+b}{2} \sqrt{a \times b} \quad ab = 4r^2 \text{ داریم:}$$

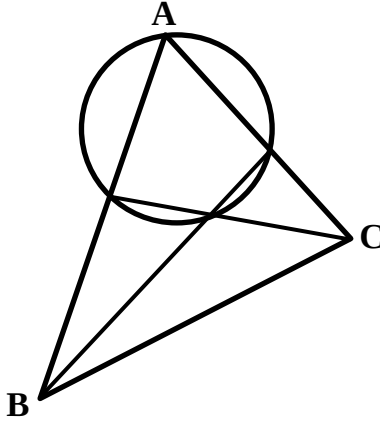
$$ab = 4r^2 \rightarrow ab = 16 ; \sin 60^\circ = \frac{4}{c} \rightarrow c = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$\text{محیطی: } a + b = c + c \rightarrow a + b = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{a+b}{2} \sqrt{a \times b} = \frac{16}{2} \times \sqrt{16} \rightarrow S = \frac{32}{\sqrt{3}}$$



۳۰- در شکل زیر، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟



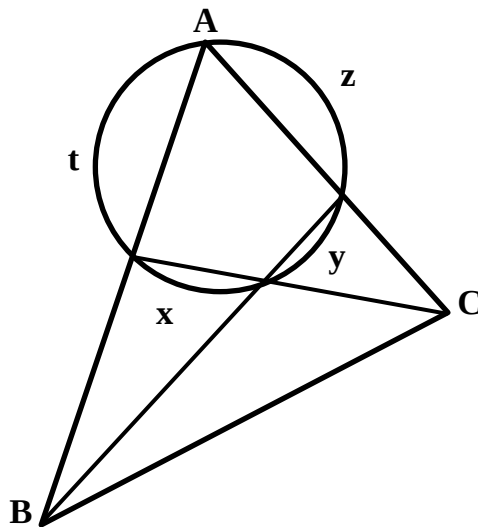
(۱) ۹۰

(۲) ۷۵

(۳) ۶۰

(۴) ۴۵

پاسخ: گزینه (۳)



$$\begin{cases} \frac{B}{2} = \frac{\widehat{z} - \widehat{x}}{2} \Rightarrow B = \widehat{z} - \widehat{x} \\ \frac{C}{2} = \frac{\widehat{t} - \widehat{y}}{2} \Rightarrow C = \widehat{t} - \widehat{y} \end{cases} \xrightarrow{+} B + C = \underbrace{(\widehat{z} + \widehat{t})}_{360^\circ - (\widehat{x} + \widehat{y})} - (\widehat{x} + \widehat{y}) \rightarrow$$

$$180^\circ - A = 360^\circ - 2(\widehat{x} + \widehat{y}) \xrightarrow{(\widehat{x} + \widehat{y}) = 2A} 2A = 180^\circ \Rightarrow \boxed{A = 90^\circ}$$

۳۱- دو دایره با شعاع یکسان در نقاط (۱، ۴) و (۳، ۲) همدیگر را قطع می‌کنند. اگر فاصله بین مراکز دو دایره، دو برابر فاصله بین نقاط تقاطع باشد، فاصله بین نقاط برخورد یکی از دایره‌ها با محور xها کدام است؟

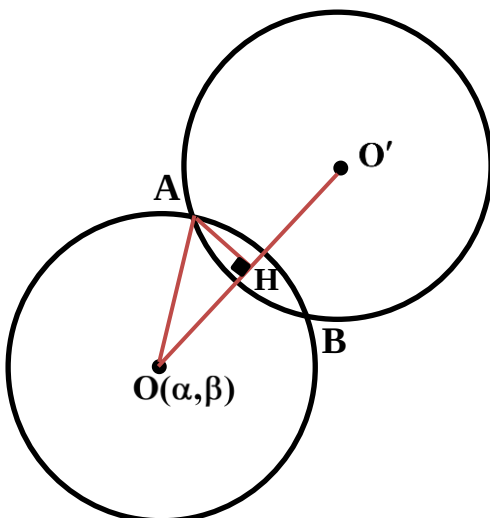
(۴) $4\sqrt{2}$

(۳) $2\sqrt{2}$

(۲) ۶

(۱) ۸

پاسخ: گزینه (۲)



$$A(1, 4), B(3, 2) \rightarrow AB = \sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2} \rightarrow \boxed{AH = \sqrt{2}}$$

$$OO' = 4\sqrt{2} \rightarrow \boxed{OH = 2\sqrt{2}}; r^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 10 \rightarrow \boxed{r = \sqrt{10}}$$

$$H = \frac{A+B}{2} \rightarrow H(2, 3); m_{AB} = \frac{4-2}{1-3} = -1 \xrightarrow{AB \perp OO'} m_{OO'} = 1$$

$$OO': y - 3 = 1(x - 2) \rightarrow y = x + 1 \rightarrow \boxed{\beta = \alpha + 1} \quad (1)$$

$$OA = \sqrt{10} \xrightarrow{(1)} \sqrt{(\alpha-1)^2 + (\alpha+1-4)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 4 \end{cases}$$

$$C: x^2 + (y-1)^2 = 10 \xrightarrow{y=0} x = 3, x = -3 \rightarrow \boxed{3 - (-3) = 6}$$

۳۲- اندازه تصویر قائم بردار $(2, -a, 3)$ بر امتداد بردار $(1, 0, a)$ ، برابر $\frac{5}{\sqrt{2}}$ است. اختلاف مقادیر a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۷ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{10}{7}$

پاسخ: گزینه (۴)

$$\vec{u} = (2, -a, 3), \vec{v} = (1, 0, a); \vec{u}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = \frac{2 + 0 + 3a}{(\sqrt{1+a^2})^2} \times (1, 0, a) = \left(\frac{2+3a}{1+a^2}, 0, \frac{a(2+3a)}{1+a^2} \right)$$

$$|\vec{u}| = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{2+3a}{1+a^2} \right)^2 + \left(\frac{a(2+3a)}{1+a^2} \right)^2} = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{2+3a}{1+a^2} \right)^2 (1+a^2)} = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{(2+3a)}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2(4 + 12a + 9a^2) = 25(1+a^2) \rightarrow 7a^2 - 24a + 17 = 0 \rightarrow$$

$$|a_2 - a_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|A|} = \frac{\sqrt{576 - 476}}{7} \Rightarrow |a_2 - a_1| = \frac{10}{7}$$

۳۳- از کانون سهمی $y^2 - x - 4y + 2 = 0$ خطی عمود بر محور تقارن آن رسم می‌شود تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند. مساحت مثلثی با رئوس A، B و رأس سهمی، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{12}$

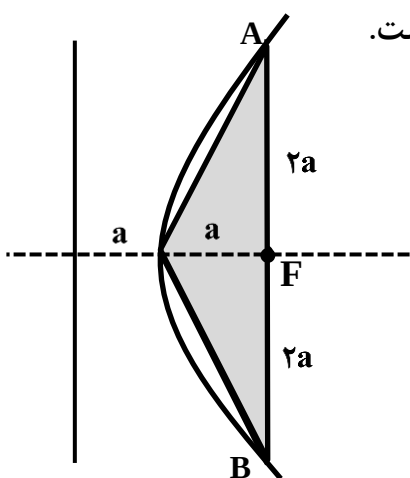
پاسخ: گزینه (۳)

خط رسم شده وتر کانونی سهمی بوده که طول آن برابر فاصله کانونی سهمی است.

$$y^2 - x - 4y + 2 = 0 \Rightarrow A = 1, B = -4, C = -1, D = 2$$

$$a = \left| \frac{C}{4A} \right| = \left| \frac{-1}{4} \right| \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$S = \frac{4a \times a}{2} = 2a^2 \rightarrow S = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 \rightarrow S = \frac{1}{8}$$



۳۴- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $D = ABC$ باشد، به ازای کدام مقدار x مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس D برابر هستند؟

۶ (۴)

۵ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ: گزینه (۱)

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x+1 & x-1 \\ x & -x+2 & x \\ -x-2 & -3 & -2x+1 \end{bmatrix} = E$$

$$E \times C = \begin{bmatrix} 2 & x+1 & x-1 \\ x & -x+2 & x \\ -x-2 & -3 & -2x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+5 & \square & x+1 \\ \square & \square & \square \\ -2x-7 & \square & -3 \end{bmatrix}$$

$$x+5-3 = x+1-2x-7 \longrightarrow \boxed{x=-4}$$

۳۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\|A\|A$ کدام است؟

۱۶ (۴)

-۱۶ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

پاسخ: گزینه (۲)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1(8-6) + 2(3-4) \Rightarrow |A| = -1$$

$$\|A\|A = |-A| = (-1)^3 |A| = (-1)(-1) = \boxed{1}$$



۳۶- باقیمانده تقسیم عدد $9 \times (24^{23} - 21^{23})$ بر عدد ۵۶ چقدر است؟

۱ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه (۳)

$$\left\{ \begin{array}{l} 24 \equiv 0 \xrightarrow{\wedge} 24^{23} \equiv 0, -16 \equiv 0 \xrightarrow{\wedge} 24^{23} \equiv -16 \\ 24 \equiv 3 \xrightarrow{()^2} 24^2 \equiv 27 \equiv -1 \xrightarrow{()^7} 24^{21} \equiv -1 \xrightarrow{\times 24^2} 24^{23} \equiv -576 \equiv -2 \end{array} \right. ; [7, 8] = 56 \quad \left\{ \begin{array}{l} 24^{23} \equiv -16 \\ 24^{23} \equiv -576 \equiv -2 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 21 \equiv -3 \xrightarrow{()^2} 21^2 \equiv 1 \xrightarrow{()^{11}} 21^{22} \equiv 1 \xrightarrow{\times 21} 21^{23} \equiv 21 \\ 21 \equiv 0 \xrightarrow{()^{23}} 21^{23} \equiv 0 \xrightarrow{\wedge} 21^{23} \equiv 21 \end{array} \right. ; [7, 8] = 56 \quad \left\{ \begin{array}{l} 21^{23} \equiv 21 \\ 21^{23} \equiv 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow (24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv (-16 - 21) \times 9 \equiv -333 + 336 \equiv 3$$

۳۷- معادله سیاله $17x + 18y = 987$ در مجموعه اعداد طبیعی، چند دسته جواب دارد؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه (۳)

$$17x + 18y = 987 \rightarrow 18y \equiv 987 \xrightarrow{17} y \equiv 1 \rightarrow y = 17k + 1 > 0 \quad (1)$$

$$17x + 18(17k + 1) = 987 \rightarrow 17x = -17 \times 18k + 969 \rightarrow x = -17k + 57 > 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow 0 \leq k \leq 3 \rightarrow n(k) = 4$$

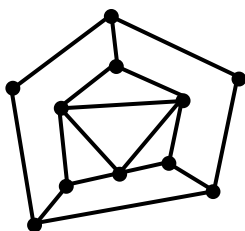
۳۸- شکل زیر، گراف G را نشان می‌دهد. مقدار $\gamma(G)$ کدام است؟

۲ (۱)

۳ (۲)

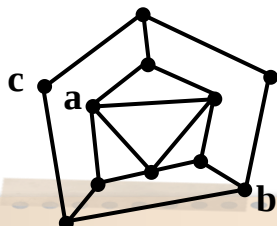
۴ (۳)

۵ (۴)



پاسخ: گزینه (۲)

با رئوس مشخص شده، کل رئوس احاطه می‌شوند، بنابراین عدد احاطه‌گری ۳ است.



۳۹- هر زیرمجموعه n عضوی از مجموعه، حداقل دو عضو دارد که مجموع آنها ۴۷ است. اگر حداقل مقدار n برابر ۲۰ باشد، بیشترین مقدار m کدام است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴) ۴۲

پاسخ: گزینه (۴)

مجموعه $\{42, 37, \dots, 36, (23, 24), (22, 25), \dots, (13, 34), (12, 35)\}$ را در نظر بگیرید. اگر زیرمجموعه‌ای در نظر

بگیریم که از هر ۱۲ زوج اول فقط یکی را شامل شود و ۷ عضو بعدی را در بر بگیرد شامل ۱۹ عضو می‌شود که مجموع هیچ دوتایی از آنها برابر ۴۷ نمی‌شود ولی با اضافه کردن عضو بیستم به این هدف قطعاً می‌رسیم. بنابراین بزرگترین مقدار m برابر ۴۲ است.

۴۰- اگر در گراف ساده G ، $|V(G)| = 18$ ، $\Delta(G) = 8$ و $\delta(G) = 3$ باشند، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار ممکن برای اندازه گراف G است؟

(۱) ۴۰ (۲) ۳۸ (۳) ۳۹ (۴) ۳۷

پاسخ: گزینه (۳)

برای حداکثر شدن یال باید بیشتر درجات را ۸ و حداقل شدن یال باید بیشتر درجات را ۳ فرض کنیم. البته باید تعداد رئوس فرد، زوج باشد. با توجه به آن که مجموع درجات گراف برابر با دو برابر تعداد یال است داریم:

$$\begin{cases} 16 \times 8 + 1 \times 3 + 1 \times 7 = 2q_{\max} \rightarrow 138 = 2q_{\max} \rightarrow q_{\max} = 69 \\ 16 \times 3 + 1 \times 8 + 1 \times 2 = 2q_{\min} \rightarrow 60 = 2q_{\min} \rightarrow q_{\min} = 30 \end{cases} \rightarrow 69 - 30 = 39$$

