

سؤال! : جواب

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma a, 14aq, 14aq^r \\ \int_{-}^{+} \Sigma a + 14aq^r = 14aq \rightarrow 1 + 14q^r - 14q = 0 \quad (14q-1)^r = 0 \\ \rightarrow \boxed{q = \frac{1}{14}} \end{aligned}$$

$$a + \frac{a}{f} + \frac{a}{14} = f + f + f = 1f \quad \rightarrow \quad \frac{11a}{14} = 1f \quad \rightarrow \quad a = \frac{7f}{11}$$

$$\frac{-\Sigma -9K}{K} = -\frac{1}{K} - F \quad -F - 9K = -1 - FK \quad F = PK \quad K = P$$

$$\frac{-\Sigma -9K}{K} = -\frac{\Sigma -1P}{P} = -1 \quad \leftarrow$$

سؤال ۳: گدا،

سؤال ۴: گ «۲»

سؤال ۵: ک "۲"

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 2 = 0 \\ x^2 + 2x - 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases} \rightarrow 3(-1) = 2$$

سؤال ٢: ج ٤.

$$-2 < \frac{2}{x^2 - 3x + 2} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{2} < -\frac{1}{2}$$

عبارت: $x^2 - 3x + 2$ محاوره مثبت است
بنابراین مخرج منفی قدری باشد

$$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 < -1 \Rightarrow x^2 - 3x + 3 < 0$$

سؤال ٧: ج ٣.

$$m_{AB} = -\frac{2}{3} \Rightarrow m_{AD} = \frac{2}{3}$$

معادله خط AD: $y - 1 = \frac{2}{3}x$

$$AB \text{ طول} = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-1)^2} = \Delta \Rightarrow AD^2 = 2\Delta \quad x^2 + (\frac{2}{3}x)^2 = 2\Delta$$

$$x^2 + \frac{4}{9}x^2 = 2\Delta \quad \frac{2\Delta}{9}x^2 = 2\Delta \Rightarrow x^2 = \pm 9$$

سؤال ٨: ج ٢.

$$f^{-1} \circ f^{-1}(0) = \alpha \quad f^{-1}(0) = g(\alpha) \quad \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(0) \rightarrow 2x - 5 = 1 \\ x = 3 \rightarrow f^{-1}(0) = 3 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 3 = \alpha + \sqrt{2\alpha - 4}$$

$$3 - \alpha = \sqrt{2\alpha - 4} \Rightarrow 9 + \alpha^2 - 6\alpha = 2\alpha - 4 \quad \alpha^2 - 8\alpha + 13 = 0$$

عقده: $\alpha = 4 \pm \sqrt{3}$
 $\alpha = 4 - \sqrt{3}$

سؤال ٩: ج ١.

$$g(1) = 4 \quad (1, 4) \in f \Rightarrow f = 2 + 2^{b-a} \Rightarrow b - a = 1 \quad (1)$$

$$f^{-1}(10) = -1 \Rightarrow f(-1) = 10 \Rightarrow 10 = 2 + 2^{b+a} \Rightarrow b + a = 3 \quad (2)$$

$$\xRightarrow{(1), (2)} \quad 2b = 4 \quad \boxed{b=2} \quad \boxed{a=1} \Rightarrow 2b - a = 2 - 1 = 1$$

سؤال ١٠: ج ٤.

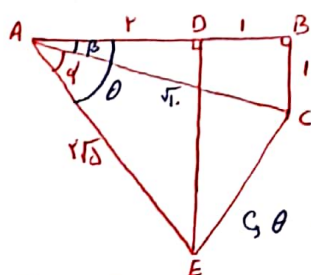
$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

$$x^2 - 2x + 4 - (x^2 - 9x - 2) = 7x(x + 2)$$

$$\Rightarrow 7x + 4 = 4x^2 + 12x \Rightarrow 4x^2 + 5x - 4 = 0$$

$x_1 = -\frac{4}{3}$
 $x_2 = \frac{1}{4}$

تنها x مثبت است.



$$DE + f = 20 \Rightarrow \boxed{DE = f}$$

$$AC^2 = 1 + 9 = 10 \Rightarrow \boxed{AC = \sqrt{10}}$$

$$\cos \beta = \frac{r}{\sqrt{10}} \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \theta = \cos(\alpha + \beta) = \frac{r}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \sin(\alpha + \beta) = \frac{f}{\sqrt{10}} = \frac{r}{\sqrt{10}} = \sin \theta$$

$$\cos \delta = \cos(\theta - \beta) = \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{r}{\sqrt{10}} + \frac{r}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

سؤال ۱۲: بگ ۳۰. $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\pi$

$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{|c|} = 2\pi \Rightarrow |c| = 1$

max: $|b| + a = 1$

$(0,0) \rightarrow 0 = a + b \cos(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}) \Rightarrow a + \frac{b}{\sqrt{3}} = 0 \rightarrow a = -\frac{b}{\sqrt{3}} \rightarrow b > 0$

$\begin{cases} b+a=1 \\ b+\frac{a}{\sqrt{3}}=0 \end{cases} \Rightarrow b(1-\frac{1}{\sqrt{3}}) = 1 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$
 $a = -1$

سؤال ۱۳: بگ ۴۰. $\cos(\frac{14\pi}{\lambda} + x) = \cos(x + \frac{\pi}{\lambda})$

$\cos(\frac{14\pi}{\lambda} - x) = \cos(\frac{\pi}{\lambda} - (\frac{\pi}{\lambda} + x)) = \sin(x + \frac{\pi}{\lambda})$

$\cos(x + \frac{\pi}{\lambda}) \sin(x + \frac{\pi}{\lambda}) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2(x + \frac{\pi}{\lambda}) = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sin(2x + \frac{2\pi}{\lambda}) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{2\pi}{\lambda} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x + \frac{2\pi}{\lambda} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{4\lambda} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{4\lambda} \end{cases} \xrightarrow{x \in [-\frac{\pi}{4\lambda}, \frac{\pi}{4\lambda}]} x = -\frac{\pi}{4\lambda}, \frac{5\pi}{4\lambda}$

سؤال ۱۴: بگ ۲۰. $f(g(x+2)) = |\frac{1}{4}(g(x+2)) - 1| = 2$

با توجه به نمودار داریم:

$\Rightarrow \begin{matrix} g(x+2) = 4 & * \\ g(x+2) = -2 & ** \end{matrix}$

استقال انقی تعداد رسم که ان تغییر می دهد و می باشد که هر دو حالت
 بنابرین مقادیر * و ** در کدام دایره جواب هستند

سؤال ۱۵: بگ ۱۰.

$f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{m}x + \pi \rightarrow f(x) = -\frac{m}{\pi}x + m$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x + \pi}{-\frac{m}{\pi}x + m} = \frac{\frac{\pi}{m}}{\frac{m}{\pi}} = \frac{\pi^2}{m^2} = \pi \rightarrow m^2 = \pi \rightarrow m = -\sqrt{\pi}$

سوال ۱۶: گ "۱"

$$x=0 \rightarrow \begin{cases} |x - [x]| = 0 \\ |x - [x-a]| = |-[-a]| = [-a] = 0 \rightarrow 0 \leq -a < 1 \end{cases}$$

«۱» $a > -1$ فرض سوال $a < -1$ در تناقض است.

سوال ۱۷: گ "۲"

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x^2} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x^2} & x < 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & x \geq 0 \\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & x < 0 \end{cases}$$

برای نقاط بحرانی $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \leftarrow x = \pm 1$ و $x < 0$ قابل قبول است پس $x = -1$

سوال ۱۸: گ "۳"

$$f(x) = |4x-3|\sqrt{ax} \quad f'_{(\frac{3}{4})^+} = 4\sqrt{ax} = \sum \sqrt{a} \frac{3}{4} = \sum 2\sqrt{3a}$$

$$f'_{(\frac{3}{4})^-} = -2\sqrt{3a} \quad f'_{(\frac{3}{4})^+} - f'_{(\frac{3}{4})^-} = \sum 4\sqrt{3a} = 2\sqrt{6}$$

توان $\Rightarrow \sum 4a = 24 \quad a = \frac{1}{4}$

سوال ۱۹: گ "۳"

$$S = \alpha + \beta = \frac{m-2}{m^2-1} \quad S'(m) = \frac{m^2-1-2m^2+2m}{(m^2-1)^2} = \frac{-m^2+2m-1}{(m^2-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \pm \sqrt{3}$$

m	$1-\sqrt{3}$	$1+\sqrt{3}$
S'	-	+
S	$\downarrow$	$\uparrow$
	min	max

که در $m = 1 + \sqrt{3}$ دارای بیشترین مقدار است اما برای این مقدار $f(x) = 0$ جواب حقیقی ندارد.

برای $m = 1 + \sqrt{3}$ و $m = 1 - \sqrt{3}$ Δ معادله $f(x) = 0$ منفی است و برای $2 - \sqrt{3}$ و $2 + \sqrt{3}$ Δ مثبت است و بیشترین مقدار S در $m = 2 - \sqrt{3}$ رخ می دهد.

سوال ۲۰: گ "۲"

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = 5 \quad f(1) \times f(2) \times f(3) \times f(4) \times f(5) = 120$$

سوال ۲۱: گ "۲"

برای این معادله $x^2 - mx + n = 0$ دارای ۲ ریشه حقیقی متمایز باشد باید $\Delta > 0$

فرض کنیم m شماره کلاس اول و n شماره کلاس دوم باشد

$$\Rightarrow m^2 - 4n > 0 \rightarrow m^2 > 4n$$

$$A = \{ (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (4,1), (4,2), (4,3) \}$$

(درین ترتیبها وجود ندارد)

$$P(A) = \frac{17}{34}$$

$$n(A) = 17 \quad \Leftarrow$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

سوال ۲۲: گ "۱"

$$P(B' | A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{P((A \cup B)')}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - \frac{5}{12}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{4}} = \frac{7}{15}$$

اعداد دسته اول به صورت ۱، ۳، ۷، ۹ و دسته دوم به صورت ۲، ۴، ۶، ۸

سوال ۲۳: گ "۳"

میانگینها برابر است:

$$\bar{x}_1 = \frac{1+3+7+9}{4} = 5 \quad \bar{x}_2 = \frac{2+4+6+8}{4} = 5$$

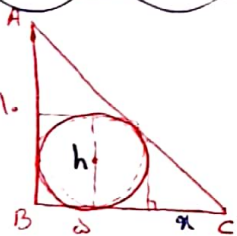
$$\sigma_1^2 = \frac{1^2+3^2+7^2+9^2}{4} = 10 \quad \sigma_2^2 = \frac{2^2+4^2+6^2+8^2}{4} = 5$$

$$\frac{C.V_1}{C.V_2} = \frac{\sigma_1/\bar{x}_1}{\sigma_2/\bar{x}_2} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

$$\text{فضای نمونه} = \left\{ \overset{\text{آل ۱}}{\bar{Q}_2}, \overset{\text{آل ۲}}{\bar{Q}_3} \right\} = 12$$

سوال ۲۴: گ "۴"

$$P(A) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$



$$\frac{h}{10} = \frac{x}{a} \quad h = 2x \quad x + h = 5$$

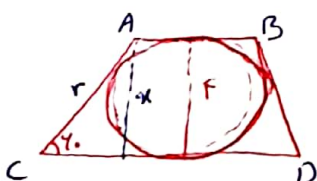
سوال ۲۵: گ "۱"

$$2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \quad h = \frac{10}{2} \rightarrow \text{مساحت} = \frac{5}{2}$$

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

سوال ۲۸: گ "۴". در خط d، خط موازی اند از مرکز موازی باشند چون $l_1 \parallel l_2$ بنابراین d، d

خط موازی می شوند که این با فرض سوال در خلاف است پس d، خط موازی هستند.



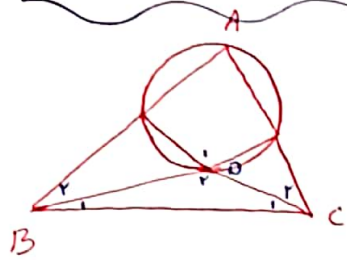
$$\sin 40^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{r} = \frac{f}{r}$$

سوال ۲۹: گ "۴"

$$\Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$AB + CD = AC + BD = 2r = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{دائرة}} = \frac{1}{r} \times (AB + CD) = \frac{1}{r} \times r \left(\frac{12}{\sqrt{3}} \right) = \frac{12}{\sqrt{3}}$$



$$\text{در } \triangle BOC : \hat{B}_r + \hat{O}_r + \hat{C}_r = 180^\circ$$

سؤال ۳: ب ۳۰

$$\frac{\hat{B}_r}{r} + \frac{\hat{O}_r}{r} + \frac{\hat{C}_r}{r} = 180^\circ \quad (1)$$

$$\hat{A} + \hat{O}_r = 180^\circ \quad \hat{O}_r = \hat{B}_r \quad \hat{A} + \hat{B}_r = 180^\circ \quad (2)$$

$$\stackrel{(1),(2)}{\Rightarrow} \frac{\hat{B}_r + \hat{C}_r}{r} + 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = \frac{\hat{B}_r + \hat{C}_r}{r} \Rightarrow \hat{A} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{r}$$

$$\Rightarrow r\hat{A} = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow r\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 70^\circ$$

سؤال ۳۲: ب ۴۰

طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ در امتداد بردار $\vec{b}$ به صورت $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$ می باشد لذا داریم:

$$\vec{a} = (r, -a, r) \quad \vec{b} = (1, 0, a) \Rightarrow \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{\Delta}{\sqrt{r}} \Rightarrow \frac{|r + 0 + ra|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1+r+a}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{\Delta}{\sqrt{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{(r+ra)^r}{1+a^2} = \frac{r\Delta}{r} \quad r(r+9a^2+12a) = 2\Delta + 2\Delta a^2$$

$$1 + 11a^2 + 12a = 2\Delta + 2\Delta a^2$$

$$va^2 - 2fa + 1v = 0 \quad a=1 \quad a=\frac{1v}{v}$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف مقادیر } a : \frac{1v}{v} - 1 = \frac{10}{v}$$

سؤال ۳۴: ب ۱۰۰

$$D = ABC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & x+1 & -1+x \\ x & -x & x \\ -2-x & -3 & -2x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 & 3-x & x+1 \\ x & 0 & -2 \\ -v-2x & x-2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$x+1-v-2x = x+2-3 \rightarrow -2x=1 \quad x=-\frac{1}{2}$$

سوال ۳۳: ب

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$| |A| A | = | -A | = (-1)^3 |A| = (-1)(-1) = 1$$

$$24 \equiv 2, \quad 21 \equiv 0$$

سوال ۳۴: ب

$$3^2 \equiv 2, \quad 3^3 \equiv 2 \cdot 2 \equiv -1, \quad 3^4 \equiv (-1)^2 = -1 \rightarrow 3^2 \times 3^2 = 3^4 \equiv -9 \equiv 5$$

$$\Rightarrow 24^{24} - 21^{24} \equiv 5 \xrightarrow{\times 9} (24^{24} - 21^{24}) \times 9 \equiv 5 \times 9 \equiv 45 \equiv 3$$

$$24^2 \equiv 0, \quad 21 \equiv 0, \quad 5^2 \equiv 1, \quad (5^2)^2 \equiv 1^2 \equiv 1, \quad 5^{22} \equiv 1$$

$$5^{24} \equiv 5, \quad 24^{24} - 21^{24} \equiv 0 - 5 \equiv -5$$

$$(24^{24} - 21^{24}) \times 9 \equiv -5 \times 9 \equiv +3$$

$$\begin{cases} (24^{24} - 21^{24}) \times 9 \equiv 3 \\ (24^{24} - 21^{24}) \times 9 \equiv 3 \end{cases} \Rightarrow (24^{24} - 21^{24}) \times 9 \equiv 3$$

$$17x + 18y = 987 \Rightarrow 18y \equiv 987, \quad y \equiv 1$$

سوال ۳۷: ب

$$y = 17k + 1, \quad 17x + 18(17k + 1) = 987, \quad 17x + 18 \times 17k + 18 = 987$$

$$17x + 18 \times 17k = 969 \Rightarrow 17x = -18 \times 17k + 969$$

$$x = -18k + 57, \quad x > 0 \rightarrow -18k + 57 > 0, \quad -18k > -57$$

$$k < \frac{57}{18}, \quad y > 0 \rightarrow 17k + 1 > 0, \quad 17k > -1, \quad k > -\frac{1}{17}$$

$$-\frac{1}{17} < k < \frac{57}{18} = 3.16 \Rightarrow k \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \rightarrow \text{دارای ۴ جواب در بازه}$$

وبسایت دکترای ریاضی