

نوین کنکور

کنکور

امتحان نهایی

**نوین کنکور
شرط لازم و کافی
برای موفقیت**

novinkonkor.com

۱- اگر جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت r را نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d خواهید داشت. مقدار $r+d$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

اگر جملات دنباله هندسی را نصف کنیم باز هم دنباله هندسی خواهد بود و تنها دنباله‌ای که هم هندسی است و هم حسابی، دنباله ثابت هر باشد.
بنابراین $d=0, r=1 \Rightarrow r+d=1$

روش دوم $\Rightarrow a_r, ar_r, ar_r^2 \xrightarrow{\text{حسابی}} r(ar_r) = a_r + ar_r^2 \Rightarrow dr = a_r + ar_r^2$

$\Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{r=1} \Rightarrow$ جست دنباله: $a_r, a_r, a_r \Rightarrow \underline{d=0}$

۲- نقاط $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور x ها را در نقطه‌ای با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ باشد، این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

با توجه به نقاط $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ می‌توان دریافت x راس سهمی برابر با $\frac{-5+3}{2} = -1$ است.

معادله سهمی $S(-1, 1) \Rightarrow y = k(x+1)^2 + 1 = k(x^2 + 2x + 1) + 1 = kx^2 + 2kx + k + 1$

با توجه به معادله α, β راس سهمی $\Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -2, \alpha\beta = \frac{k+1}{k} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$\Rightarrow 5 = (-2)^2 - 2\frac{k+1}{k} \Rightarrow 2(\frac{k+1}{k}) = -1 \Rightarrow 2k+2 = -k \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$

معادله سهمی $\Rightarrow y = -\frac{2}{3}(x+1)^2 + 1 \xrightarrow{x=0} y = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$

۵- اگر α و β ریشه‌های متمایز معادله $ax^2 - ax - b = 0$ و $4\alpha\beta^2 + 2\alpha^2 - 2\alpha\beta = 17$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \quad (4) \checkmark$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (3)$$

$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\alpha, \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -\frac{b}{a}$$

$$4\alpha\beta^2 + 2\alpha^2 - 2\alpha\beta = 17 \Rightarrow 2\beta^2 + 1\alpha\beta^2 + 2\alpha^2 - 1\alpha\beta - 2\alpha\beta = 17$$

$$\Rightarrow 2(\alpha^2 + \beta^2) + 1(\beta^2 - \alpha^2) - 2\alpha\beta = 17 \Rightarrow 2(1 + \frac{2b}{a}) + \frac{1\beta - 1\alpha - 2\beta}{-1(\alpha + \beta)} = 17$$

$$\Rightarrow 2(1 + \frac{2b}{a}) = 17 \Rightarrow 1 + \frac{2b}{a} = \frac{15}{2} \Rightarrow \frac{2b}{a} = \frac{13}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{a^2 + 4ab}}{a} = \frac{a\sqrt{1 + \frac{4b}{a}}}{a} = \sqrt{1 + \frac{13}{2}} = \sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

۶- مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{16}{9}$ کدام است؟

$$\frac{2}{25} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3) \checkmark$$

$$\frac{1}{75} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{(x-1)^2 + x^2}{x^2(x-1)^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2(x-1)^2} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(x-1) + 1}{x^2(x-1)^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow x(x-1) = t \Rightarrow \frac{t^2 + 1}{t^2} = \frac{16}{9} \Rightarrow 16t^2 - 18t - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3}{2} \\ t_2 = -\frac{3}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow S_1 = -\frac{b}{a} = 1 \\ x^2 - x = -\frac{3}{16} \Rightarrow x^2 - x + \frac{3}{16} = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{b}{a} = 1 \end{cases} \Rightarrow 1+1=2$$

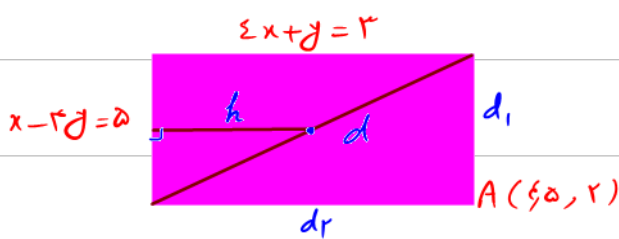
۷- نقطه $(\frac{4}{5}, 2)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $4x + y = 3$ و $x - 4y = 5$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع کدام است؟

$\sqrt{17}$ (۴)

$2\sqrt{17}$ (۳)

$\frac{\sqrt{17}}{4}$ (۲)

$\frac{\sqrt{17}}{2}$ (۱) ✓



نقطه $A(\frac{4}{5}, 2)$ بر روی هیچ یک از خطوط داده شده نمی باشد.
حال مربعیت فاصله نقطه A را تا هر یک از خط ها می گیریم
طول عرض مستطیل مشخص شود.

$$\left. \begin{aligned} \text{فاصله } A \text{ تا خط } 4x + y = 3 \text{ } d_1 &= \frac{|4(\frac{4}{5}) + 2 - 3|}{\sqrt{17}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \\ \text{فاصله } A \text{ تا خط } x - 4y = 5 \text{ } d_2 &= \frac{|(\frac{4}{5}) - 4(2) - 5|}{\sqrt{17}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \end{aligned} \right\} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

۸- وارون تابع $f(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{mx - 1}}$ در دامنه محدود، خط $y = 12 - x$ را در نقطه ای به عرض ۱۰ قطع می کند. مقدار $f(m + 4)$ کدام است؟

۱ (۴) ✓

۲ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

$$y = 12 - x \xrightarrow{y=10} 10 = 12 - x \Rightarrow x = 2 \quad (2, 10) \in f^{-1} \Rightarrow (10, 2) \in f$$

$$2 = \sqrt{10 - 2\sqrt{10m - 1}} \Rightarrow 2 = 10 - 2\sqrt{10m - 1} \Rightarrow \sqrt{10m - 1} = 2 \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow f(m + 4) = f(5) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5 - 1}} = 1$$

۹- مقداری از یک عنصر موجود است. اگر عنصر در هر ساعت $\frac{1}{9}$ از جرم باقیمانده را از دست بدهد، پس از چند دقیقه

$\frac{1}{6}$ از جرم عنصر باقی خواهد ماند؟ ($\log_3^5 = 2,4$ و $\log_3^4 = 1,4$)

۴۲۰ (۴)

۴۴۰ (۳)

۳۶۰ (۲)

۳۸۰ (۱) ✓

$$t_n = t_1 \left(\frac{1}{9}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{6} t_1 = t_1 \left(\frac{1}{9}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{9}\right)^n \Rightarrow \log_9^{\frac{1}{6}} = \log_9 \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

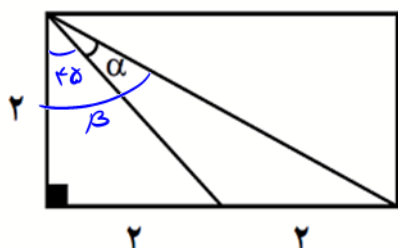
$$\Rightarrow -\log_9^{\frac{1}{6}} = n \log_9^{\frac{1}{9}} \Rightarrow n = \frac{-\log_9^{\frac{1}{6}}}{\log_9^{\frac{1}{9}} - \log_9^{\frac{1}{9}}} = \frac{-\log_9^{\frac{1}{6}} - \log_9^{\frac{1}{9}}}{2\log_9^{\frac{1}{9}} - 2\log_9^{\frac{1}{9}}} \quad (1)$$

$$\log_9^{\frac{1}{6}} = 2,4 \Rightarrow \log_9^{\frac{1}{9}} = \frac{1}{2,4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

$$\log_9^{\frac{1}{9}} = 1,4 \Rightarrow \log_9^{\frac{1}{9}} = \frac{1}{1,4} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$(1) \Rightarrow n = \frac{-\frac{5}{12} - \frac{5}{7}}{\frac{5}{12} - \frac{5}{7}} = \frac{-\frac{35}{84} - \frac{60}{84}}{\frac{35}{84} - \frac{60}{84}} = \frac{-95}{-25} = +\frac{19}{5} \approx 3,8 \approx 3,8 \times 60 = 228 \approx 228$$

۱۰- در شکل زیر، مقدار $\cot \alpha$ کدام است؟



۱ (۱)

۳ (۲) ✓

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۴)

$$\alpha + \epsilon\delta = \beta \Rightarrow \alpha = \beta - \epsilon\delta \quad \tan \beta = \frac{2}{2} = 1$$

$$\tan \alpha = \tan(\beta - \epsilon\delta) = \frac{\tan \beta - \tan \epsilon\delta}{1 + \tan \beta \tan \epsilon\delta} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{0} = \infty$$

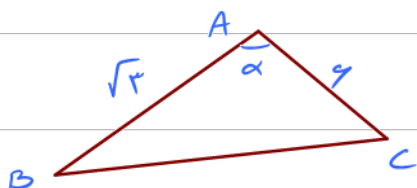
- ۱۱- مثلث ABC، با اضلاع $\sqrt{3}$ و ۶ و α (زاویه بین آنها) قابل رسم است. اگر مساحت این مثلث $4/5$ باشد، بیشترین مقدار α چند برابر کمترین مقدار α است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

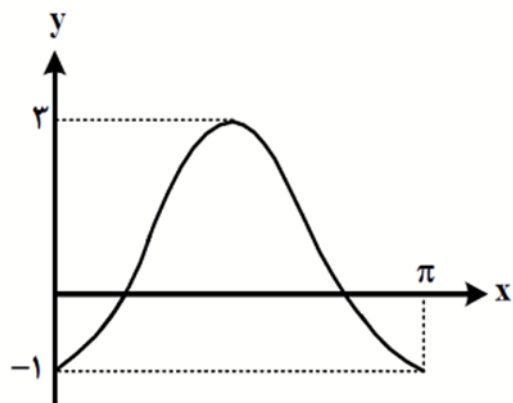
۲ (۱) ✓



$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{3} \times \sin \alpha = \frac{9}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 9.0^\circ \\ \alpha_2 = 12.0^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{12.0}{9.0} = 2$$

- ۱۲- اگر شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin(cx - \frac{3\pi}{4}) \cos(cx - \frac{3\pi}{4})$ باشد، اختلاف صفرهای تابع f در بازه $[0, \pi]$ ، کدام است؟



$\frac{\pi}{6}$ (۱)

$\frac{\pi}{4}$ (۲)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

$\frac{2\pi}{3}$ (۴) ✓

$$f(x) = a + \frac{b}{r} \sin(rx - \frac{3\pi}{r}) = a + \frac{b}{r} \cos(rx)$$

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|rc|} = \pi \Rightarrow |rc| = 2 \Rightarrow c = \pm 1 \Rightarrow c = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{r} = -1 \quad x = \frac{\pi}{r} \Rightarrow a - \frac{b}{r} = 3$$

$$\begin{cases} a + \frac{b}{r} = -1 \\ a - \frac{b}{r} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 1 - 2\cos(rx) = 0$$

$$\cos rx = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{r} \Rightarrow rx = 2k\pi \pm \frac{\pi}{r} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{r} \\ x_2 = \frac{2\pi}{r} \end{cases} \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{\pi}{r}$$

۱۳- در معادله مثلثاتی $m(\cos x - \sin x) - 3\sqrt{6} \sin(2x) = \sqrt{6}$ اگر $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

(۱) -۶ (۲) -۳ (۳) ۶ (۴) ۳

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x - \sin x = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (*)$$

$$\Rightarrow m(\frac{\sqrt{6}}{3}) - 3\sqrt{6} \sin 2x = \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{6}(\frac{m}{3} - 3 \sin 2x) = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{m}{3} - 3 \sin 2x = 1 \quad (I)$$

$$(*) (\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{3}$$

$$(I) \Rightarrow \frac{m}{3} - 3 \times \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{m}{3} = 2 \Rightarrow \underline{m = 6}$$

۱۴- تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

$$\text{از آنجا که } f \text{ اکیداً نزولی است} \Rightarrow f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2) \Rightarrow m^2 - m - 5 > -3 + 2m - m^2$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 2m - 2 > 0 \Rightarrow (m-2)(2m+1) > 0 \Rightarrow$$

	$-\frac{1}{2}$	2
$2m^2 - 2m - 2$	+	-
	∞	0∞

$$\Rightarrow m < -\frac{1}{2} \quad (I)$$

$$m^2 - m - 5 < 0 \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{21}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \quad (II)$$

$$-3 + 2m - m^2 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 3 > 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

$$(I), (II) \Rightarrow m = -1$$

۱۵- f تابع هموگرافیک، $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)}$ است، کدام عدد می تواند حاصل

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$ باشد؟

۲ (۴)

۱ (۳) ✓

$\frac{1}{2}$ (۲)

صفر (۱)

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$g(x) = \frac{cx+d}{ax+b} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{-bx+d}{ax-c}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)} = \frac{a/c}{-b/a} = -\frac{a^2}{bc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)} = \frac{-b/a}{c/a} = -\frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow -\frac{a^2}{bc} = -\frac{b}{c} \Rightarrow a^2 = b \Rightarrow a = \pm \sqrt{b} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = -\frac{b}{a} = \pm 1$$

۱۶- برای مقدار مشخص k ، تابع $f(x) = \begin{cases} |x - [-x]| & \text{زوج } [x] \\ x - [x] + k & \text{فرد } [x] \end{cases}$ در $x = n$ و $x = -n$ پیوسته است. کدام مورد

درخصوص n صحیح است؟ ($k, n \in \mathbb{N}$)

n فرد (۲) ✓

n زوج (۱)

(۴) برای هیچ مقداری از n پیوسته نیست.

(۳) برای جميع مقادیر n پیوسته است.

با مثال عددی برای n سه راجع کنیم. اگر $n=1$ در دوگزینه مربوط به پیوستگی در نقاط $x = \pm 1$ بررسی کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow f(1)=k \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)=k \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)=2 \Rightarrow k=2 \\ x=-1 \Rightarrow f(-1)=k \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)=k \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)=2 \Rightarrow k=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{پیوسته}$$

$$x=2 \Rightarrow f(2)=2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)=5, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)=k+1$$

حال اگر $n=2$ بررسی کنیم.
 به سه عددی مورد به ازای هیچ مقداری از k پیوسته نمی باشد.

۱۷- اگر $f(x) = \left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2$ و $f(x) = xg(x) + 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ کدام است؟

(۴) -۲

(۳) -۴ ✓

(۲) ۲

(۱) ۴

$$g(x) = \frac{f(x)-1}{x} = \frac{\left(\frac{-1+\sin x}{1+\sin x}\right)^2 - 1}{x} = \frac{1 + \sin^2 x - 2\sin x - 1 - \sin^2 x - 2\sin x}{x(1+\sin x)^2} = \frac{-2\sin x}{x(1+\sin x)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin x}{x(1+\sin x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin x}{x} = -2$$

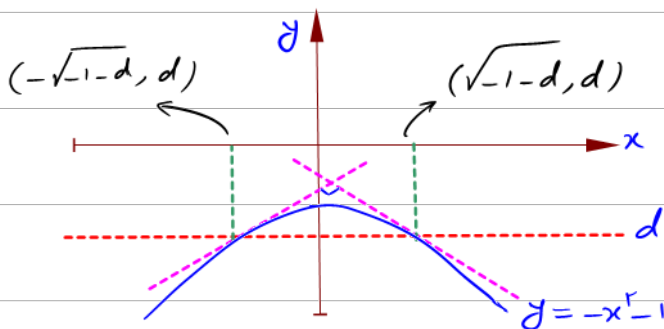
۱۸- خط d موازی محور x ها، قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور x ها را در دو نقطه قطع می کند و مماس های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

(۴) ۲٫۷۵

(۳) ۰٫۷۵

(۲) ۳٫۲۵

(۱) ۱٫۲۵ ✓



$$\begin{cases} y = -x^2 - 1 \\ y = d \end{cases} \Rightarrow d = -x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1-d}$$

$$y' = -2x \Rightarrow (-2\sqrt{-1-d})(2\sqrt{-1-d}) = -1$$

$$\Rightarrow 2(-1-d) = 1 \Rightarrow d+1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow d = -\frac{3}{2} = -1,5$$

۱۹- به ازای چند مقدار صحیح و منفی k ، نقطه عطف منحنی $y = kx^3 + (k+1)x^2$ در ناحیه دوم محورهای مختصات قرار دارد؟

(۴) ✓ صفر

(۳) بیش از ۲

(۲) ۲

(۱) ۱

$$y' = 3kx^2 + 2(k+1)x \Rightarrow y'' = 6kx + 2(k+1) \xrightarrow{k < 0} x = \frac{-2(k+1)}{6k} = \frac{-(k+1)}{3k}$$

برای اینکه نقطه عطف در ناحیه دوم قرار گیرد باید $x < 0$ و $y > 0$ باشد.

$$x = -\frac{(k+1)}{3k} < 0 \Rightarrow$$

k	-1	0	
-(k+1)	+	0	-
3k	-	-	+
	-	0	+

$$\Rightarrow k < -1 \quad \underline{\quad} \quad k > 0 \quad \textcircled{I}$$

$$y = kx^3 + (k+1)x^2 = k \left(-\frac{(k+1)}{3k} \right)^3 + (k+1) \left(-\frac{(k+1)}{3k} \right)^2 = -\frac{(k+1)^3}{27k^2} + \frac{(k+1)^3}{9k^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2(k+1)^3}{27k^2} > 0 \Rightarrow k+1 > 0 \Rightarrow k \in (-1, \infty) - \{0\} \quad \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I}, \textcircled{II} \Rightarrow \emptyset$$

۲۰- کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y = \sqrt{x - [x^2]}$ از خط $2x - y + 2 = 0$ کدام است؟

$$\frac{3\sqrt{5}}{10} \quad (4)$$

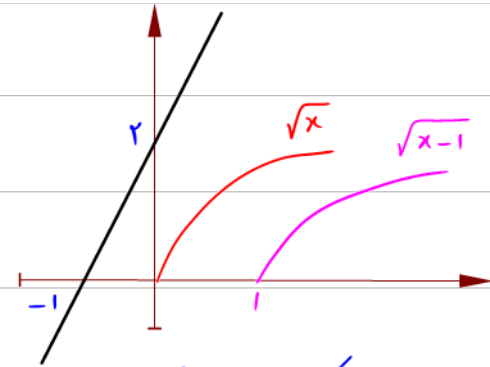
$$\frac{\sqrt{5}}{10} \quad (3)$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{8} \quad (2) \quad \checkmark$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (1)$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0 \Rightarrow y = \sqrt{x}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow 1 \leq x^2 < 4 \Rightarrow [x^2] = 1 \Rightarrow y = \sqrt{x-1}$$



باتوجه به شکل نمودار مشخص است نمودار $\sqrt{x}$ که در این ناحیه را تا خط داده شده، خواهد داشت.

$$d = \frac{|2x - \sqrt{x} + 2|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{2x - \sqrt{x} + 2}{\sqrt{5}} \quad \text{ساده} \Rightarrow d' = \frac{2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{5}} = 0$$

$$2x - y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}, \quad y = \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow d = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

نوین کنکور

کنکور

امتحان نهایی

**نوین کنکور
شرط لازم و کافی
برای موفقیت**

novinkonkor.com