

۱۲۶- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1}$ ، کدام است؟

- (۱) $1 + \sqrt{3}$ (۲) $-1 + \sqrt{2}$ (۳) $1 - \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

حل اول

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{5 - \sqrt{6}} \times \frac{5 + \sqrt{6}}{5 + \sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{2} + 2\sqrt{12} + 15\sqrt{3} + 3\sqrt{18}}{25 - 6} = \frac{19\sqrt{2} + 19\sqrt{3}}{19} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} \xrightarrow{\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}} (\sqrt{3} - 1)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{3 - 1}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) = \sqrt{2} - 1$$

حل دوم (شاگردای خودی)

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt{3} - 1)^{-1} = \frac{2/8 + 5/2}{5 - 2/4} - 2\left(\frac{1/7 - 1}{1}\right)^{-1} = \frac{8}{2/6} - \frac{20}{7} = (3)^+ - (3)^- = 0 / \dots$$

$$\sqrt{27} \text{ با قاعده بنا محاسبه شده است. } (\sqrt{5^2 + 2} = 5 + \frac{2}{2 \times 5})$$

گزینه ۴ منفی

گزینه ۳ منفی

گزینه ۲ ۰/۴ ✓

گزینه ۱ ۲/۷

۱۲۷- اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته بندی می کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد،

یعنی $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$ در دسته نهم، واسطه حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

۷۴ (۴)

۷۳ (۳)

۷۲ (۲)

۷۱ (۱)

عدد آخر هر دسته مربع کامل شماره همان دسته است، پس عدد آخر دسته هشتم $8^2 = 64$ است؛ عدد بعدی (65) اولین عدد دسته نهم است.

عدد آخر دسته نهم $9^2 = 81$ است.

اگر x واسطه عددی بین 65 و 81 باشد داریم:

$$x = \frac{65+81}{2} = 73$$

۱۲۸- فرض کنید چند جمله ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد. اگر $Q(x) = p(x-1) + p(1-x)$ ، آنگاه حاصل تقسیم

$Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

$p(x)$ بر عامل های $x^2 - 1$ یعنی $(x-1)$ و $(x+1)$ بخش پذیر است: $p(1) = 0$ ، $p(-1) = 0$

برای تعیین باقی مانده $Q(x)$ بر $x-2$ کافیه ریشه مقسوم علیه را در مقسوم (Q) جای گذاری کنیم:

$$Q(2) = p(1) + p(-1) = 0$$

۱۲۹- معادله درجه دوم $3x^2 + (2m-1)x + 2-m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه ها با معکوس

حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟

$-\frac{5}{2}$ (۴)

-۱ (۳)

۳ (۲)

$\frac{7}{2}$ (۱)

$$S = \frac{1}{P} \xrightarrow{S=-\frac{b}{a}, P=\frac{c}{a}} \frac{1-2m}{3} = \frac{3}{2-m} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2m^2 - 5m - 7 = 0 \quad \left[\begin{array}{l} m = -1 \xrightarrow{\text{بررسی}} \Delta < 0 \\ m = \frac{7}{2} \end{array} \right.$$

دو مقدار برای m بدست می آید، با بررسی شرط Δ برای $m = -1$ ، Δ منفی می شود که با شرط داشتن دو ریشه در تناقض است.

چون در گزینه ها (به ازای هیچ مقدار m) نداریم، نیاز به بررسی $\frac{7}{2}$ نیست و قابل قبول است.

۱۳۰- مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3$ ، کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{5}, \frac{5}{6})$ (۲) $(\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$ (۳) $(2, 1)$ (۴) $(2, \frac{5}{8})$

جواب به صورت بازه ای از اعداد در گزینه ها آمده $\longleftarrow$ عدد گذاری از محل اختلاف نظر گزینه ها

حذف گزینه های 1 و 2 به جرم نداشتن عدد خوب 1/5 $x = 1/5 \implies 1 < \frac{1/5+1}{2(1/5)-1} < 3$ ✓

حذف گزینه 3 به جرم نداشتن عدد خوب 1 $x = 1 \implies 1 < \frac{2}{1} < 3$ ✓

۱۳۱- فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 11)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام یک از نقاط زیر می گذرد؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-1, 4)$ (۳) $(2, 9)$ (۴) $(2, 15)$

$(0, 5) \implies c = 5$

$(1, 11) \implies a + b + 5 = 11 \implies a + b = 6$

$(-2, 5) \implies 4a - 2b + 5 = 5 \implies 2a - b = 0$

$\implies a = 2, b = 4$

$y = 2x^2 + 4x + 5$
گزینه 1 در تابع صدق می کند

۱۳۲- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $4\sqrt{15}$ (۲) $6\sqrt{7}$ (۳) $4\sqrt{17}$ (۴) $6\sqrt{10}$

تابع انتقال یافته $\sqrt{x} \xrightarrow{\text{واحد به راست}} \sqrt{x-12} \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} \sqrt{x-12} + 2$

بررسی عدد خوشگل $\sqrt{x} = \sqrt{x-12} + 2 \xrightarrow{\text{تقاطع تابع اولیه با تابع انتقال یافته}} x = 16$

با توجه به دامنه اولین عددی که زیر رادیکال ها رو مربع کامل می کنه 16ئه که تو معادله صدق می کنه و عرض تقاطع 4میشه

فاصله از $(0,0)$ $\xrightarrow{(16, 4)}$ $\sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{16 \times 16 + 16} = \sqrt{17(16)} = 4\sqrt{17}$

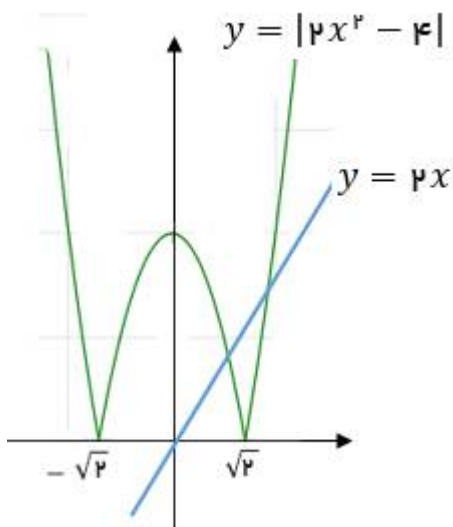
۱۳۳- در بازه (a, b) ، نمودار تابع با ضابطه $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



با توجه به نمودار دو تابع واضح است که بین تقاطع دو تابع بازه ای است که $y = |2x^2 - 4|$ زیر خط $y = 2x$ قرار دارد برای بدست آوردن نقطه تقاطع داریم:

$$2x = |2x^2 - 4|$$

با توجه به شکل که نقاط تقاطع اطراف $\sqrt{2}$ هستند اعداد نزدیک ۱ و ۲ را بررسی می کنیم که در معادله صدق می کنند.

$$(a, b) = (1, 2) \rightarrow b - a = 1$$

همان طور که گفته شد نیازی به حل معادله قدر مطلق نیست اما به صرف تمرین:

$$2x = |2x^2 - 4| \begin{cases} x > \sqrt{2} \rightarrow 2x = 2(x^2 - 2) \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1 \text{ غ ق } , x = 2 \\ x \leq \sqrt{2} \rightarrow 2x = -2(x^2 - 2) \rightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow x = 1, x = -2 \text{ غ ق } \end{cases}$$

۱۳۴- اگر $f(x) = 2x - |2x|$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، بُرد تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

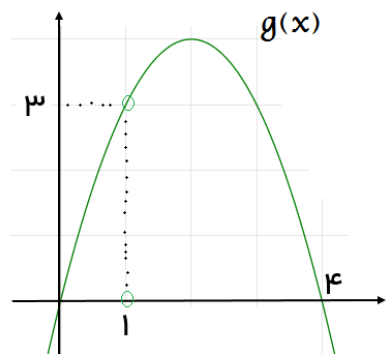
۴ (۴) $[1, 4)$

۳ (۳) $[0, 4)$

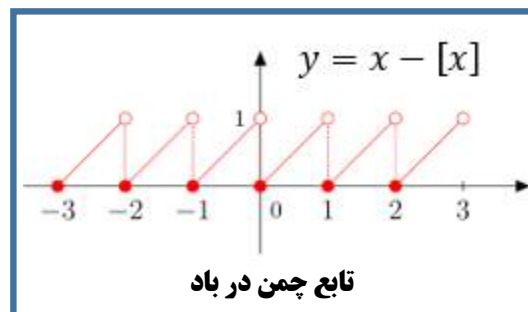
۲ (۲) $[0, 3)$

۱ (۱) $[0, 2)$

تابع $f(x)$ در واقع همان تابع معروف چمن در باد است که طول بازه های هر شاخه تغییر کرده (نصف شده)!!! داشتن ضریب برای x روی خروجی (برد) تابع تاثیری ندارد و در بازه $[0, 1)$ است.



$$[0, 3) \xrightarrow{g} [0, 3) \xrightarrow{f} [0, 1)$$



تابع چمن در باد

با توجه به نمودار $g(x)$ واضح است در صورتی که ورودی آن در بازه $[0, 1)$ خروجی آن در بازه $[0, 3)$ قرار دارد.

۱۳۵- اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6) + g(12)$ ، کدام است؟

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

سوال در واقع $f^{-1}(6) + f^{-1}(12)$ را از ما می خواهد

$$f^{-1}(6) = ? \rightarrow f(?) = 6 \implies f(?) = ? + \sqrt{?} = 6 \xrightarrow{\text{عدد خوشگل}} ? = 4$$

$$\Rightarrow 4 + 9 = 13$$

$$f^{-1}(12) = ? \rightarrow f(?) = 12 \implies f(?) = ? + \sqrt{?} = 12 \xrightarrow{\text{عدد خوشگل}} ? = 9$$

۱۳۶- تابع f با ضابطه $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه چهارم را با کدام طول، قطع می کند؟

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

بجای حل سوال از گزینه ساده تر شروع به بررسی می کنیم

گزینه ۲ (نقطه تلاقی : $(1, -1)$) (عرض نقطه با توجه به اینکه روی نیمساز ربع چهارم قرار دارد تعیین شد.)

$$f^{-1}(1) = -1 \rightarrow f(-1) = 1 \xrightarrow{\text{بررسی}} \checkmark$$

۱۳۷- اگر $\log_4 3 = 0.8$ باشد، مقدار $\log_{12} 6$ ، کدام است؟

$\frac{7}{9}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{8}{11}$ (۲)

$\frac{13}{18}$ (۱)

$$\log_4 3 = \log_{2^2} 3 = \frac{1}{2} \log_2 3 = 0.8 \rightarrow \log_2 3 = 1.6$$

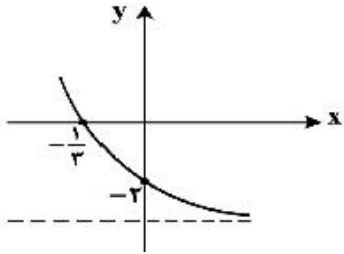
$$\log_{12} 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 12} = \frac{\log_2 3 + \log_2 2}{\log_2 3 + \log_2 4} = \frac{1.6 + 1}{1.6 + 2} = \frac{2.6}{3.6} = \frac{13}{18}$$

حل دوم (شاکردای خودی) (مثل تیپ تبدیلی مثلثات که فرض غیر منطقی می کنیم ، ولی چون نسبت می خواهیم اوکیه)

$$\frac{\log 3}{\log 4} = \frac{8}{10} \implies \log 3 = 8, \quad \log 4 = 10 \xrightarrow{\log 2^2 = 2 \log 2} \log 2 = 5$$

$$\frac{\log 6}{\log 12} = \frac{\log 3 + \log 2}{\log 3 + \log 4} = \frac{8 + 5}{8 + 10} = \frac{13}{18}$$

۱۳۸- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$ است. $f(-\frac{5}{3})$ ، کدام است؟



(۱) ۵۴
(۲) ۶۰
(۳) ۴۸
(۴) ۲۸

با توجه به تقاطع تابع با محور طول ها و عرض ها داریم:

$$\left. \begin{aligned} f(0) = -2 &\rightarrow -4 + 2^b = -2 \Rightarrow 2^b = 2 \rightarrow b = 1 \\ f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 &\rightarrow -4 + 2^{-\frac{a}{3}+1} = 0 \Rightarrow 2^{-\frac{a}{3}+1} = 2^2 \rightarrow a = -3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} f(x) &= -4 + 2^{-3x+1} \\ f\left(-\frac{5}{3}\right) &= -4 + 2^6 = 60 \end{aligned}$$

۱۳۹- فرض کنید در دامنه $[0, +\infty)$ ، تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2^x + (\frac{1}{2})^x}{2}$ ، مقروض باشد. $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

(۱) $\log_2(2 - \sqrt{3})$ (۲) $\log_2(\sqrt{3} - 1)$ (۳) $\log_2(1 + \sqrt{3})$ (۴) $\log_2(2 + \sqrt{3})$

$$f^{-1}(2) = ? \rightarrow f(?) = 2$$

پس باید ببینیم به ازای کدام ورودی حاصل $f(x)$ برابر ۲ می شود:

$$f(x) = 2 \rightarrow 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \xrightarrow{2^x=t} t + \frac{1}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 + 1 = 4t$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 12, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

$$t_1 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \implies t = 2^x = 2 + \sqrt{3} \rightarrow x = \log_2(2 + \sqrt{3}) \quad \checkmark$$

$$t_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \implies t = 2^x = 2 - \sqrt{3} \rightarrow x = \text{منفی} \rightarrow \text{غ ق ق}$$

۱۴۰- حاصل عبارت $\tan(300^\circ)\cos(210^\circ) + \tan(480^\circ)\sin(840^\circ)$ ، کدام است؟ (اعداد داده شده بر حسب درجه هستند).

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

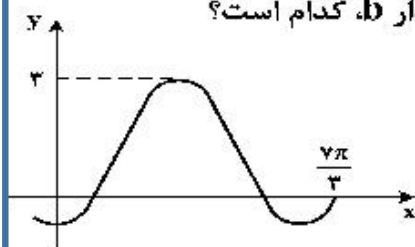
$-\frac{1}{2}$ (۱)

از زوایای داده شده 360 تا 360 تا بیرون می ریزیم:

$$\tan(-60^\circ)\cos(-150^\circ) + \tan(120^\circ)\sin(120^\circ) = (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

- کسینوس منفی خوار ، بقیه سوراخ دار
- سینوس زوایای مکمل باهم برابر و سایر نسبت های مثلثاتی برای زوایای مکمل قرینه یک دیگرند.

۱۴۱- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ است. مقدار b ، کدام است؟



۲ (۱)

۱ (۲)

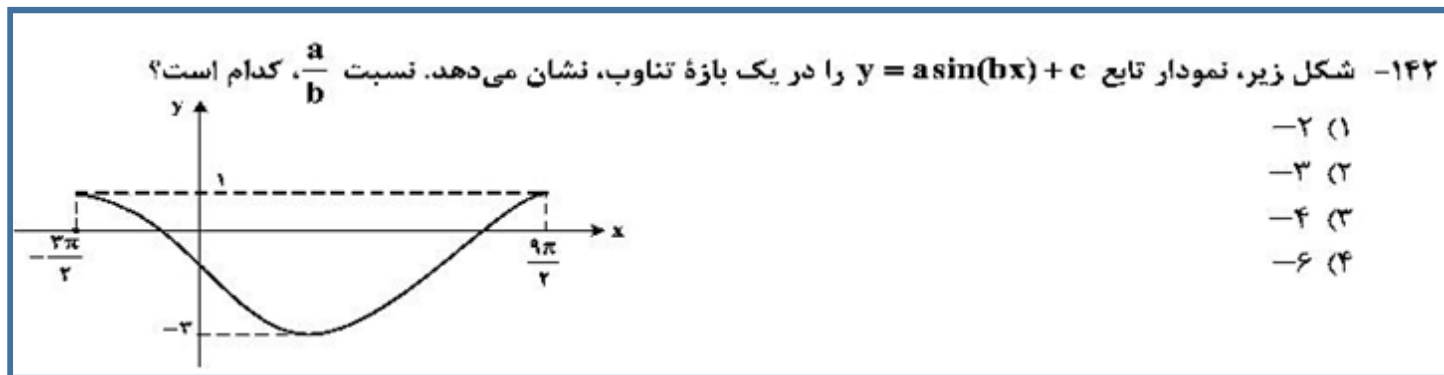
-۱ (۳)

-۲ (۴)

تابع پس از ساده سازی به صورت $y = a + b \cos(x)$ است. با توجه به نمودار مشخص است که ضریب $\cos(x)$ منفی است. (حذف گزینه های 1 و 2)

$$y_{\max} = 3 \xrightarrow{\cos(x)=-1} a - b = 3$$

$$\left(\frac{7\pi}{3}, 0\right) \rightarrow a + b \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = a + \frac{b}{2} = 0 \xrightarrow{\text{جایگذاری } a = -\frac{b}{2} \text{ در رابطه بالا}} -\frac{b}{2} - b = 3 \rightarrow b = -2$$



با توجه به نمودار واضح است که a یا b یک کدام منفی هستند. ($ab < 0$) ، با فرض b مثبت:

$$T = \frac{9\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 6\pi \quad , \quad 2\pi \xrightarrow{\times 3} 6\pi \xrightarrow{\text{طبق انتقال: تغییرات روی محور } x \text{ ها برعکس}} b = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} y_{\max} = 1 & \xrightarrow{\sin(bx)=-1} -a + c = 1 \\ y_{\min} = -3 & \xrightarrow{\sin(bx)=1} a + c = -3 \end{aligned} \Rightarrow a = -2 \Rightarrow \frac{a}{b} = -6$$

۱۴۳- جواب های معادله مثلثاتی $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$ ، با شرط $x \neq k\pi$ ، که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

(۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $\frac{2k\pi}{3}$ (۳) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

با توجه به گزینه ها از محل اختلاف نظر گزینه ها ، زاویه چک می کنیم:

$x = 0 \rightarrow \sin(-45) = \cos(45)$ حذف گزینه های ۱ و ۲ به جرم داشتن زاویه بد صفر

$x = -30 \rightarrow \sin(-105) = \cos(15)$ حذف گزینه ۳ به جرم داشتن زاویه بد -۳۰ درجه

۱۴۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$ ، کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۱

$$x \rightarrow -2^- : \frac{[-2^-] + 3}{x + 2} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = \text{صفر}$$

۱۴۵- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{4x^n - 12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{18}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{5}{36}$

با توجه به اینکه حاصل حد در بی نهایت عدد شده پس پرتوان بالا با پرتوان پایین برابر است: $n = 1$

$$x \rightarrow \infty : \frac{ax}{4x} = \frac{1}{6} \longrightarrow a = \frac{2}{3} \implies f(x) = \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{4x - 12}$$

$$x \rightarrow 3 : \frac{0}{0}$$

حل اول) استفاده هوییتال

$$HOP \xrightarrow{x=3} \frac{\frac{2}{3} - \frac{2x}{3\sqrt{(x^2 - 1)^2}}}{4} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{6}{3\sqrt{64}}}{4} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{6}{12}}{4} = \frac{\frac{8 - 6}{12}}{4} = \frac{\frac{1}{6}}{4} = \frac{1}{24}$$

حل دوم (شاکردای خودی)

$$\frac{\frac{2}{3} \times \frac{31}{10} - 2 - \frac{6}{120}}{\frac{4}{10}} = \frac{\frac{62 - 60 - 1/5}{30}}{\frac{4}{10}} = \frac{\frac{1}{60}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{24}$$

۱۴۶- تابع با ضابطہ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{3}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ ، مشتق پذیر است. مقدار c کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

بررسی پیوستگی در نقطه $x = -2$

$$\begin{cases} \text{چ} \rightarrow 3 \\ \text{ر} \rightarrow -2 - 2b + c \end{cases} \Rightarrow -2b + c = 5$$

بررسی مشتق چپ و راست در نقطه $x = -2$

$$\begin{cases} \text{چ} \xrightarrow{x=-2} \frac{-2}{2\sqrt{5-2x}} = -\frac{1}{3} \\ \text{ر} \rightarrow -x + b = 2 + b \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$$

با جایگذاری $b = -\frac{7}{3}$ در رابطه $-2b + c = 5$ مقدار $c = \frac{1}{3}$ محاسبه می شود.

۱۴۷- مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x} \right)^3$ در نقطه $x = 2$ ، کدام است؟

(۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{5}{4}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{15}{4}$

نخست تابع را برای بهتر مشتق گرفتن ساده می کنیم.

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) = \frac{\overbrace{(2x+2)}^{\text{مشتق صورت}} \cdot \overbrace{(x^2-x)^3}^{\text{مخرج}} - \overbrace{3(x^2-x)^2(2x-1)}^{\text{مشتق مخرج}}}{(x^2-x)^6}$$

$$f'(2) = \frac{6 \times 8 - 3 \times 4 \times 3 \times 8}{64} = \frac{8(6-36)}{64} = -\frac{30}{8} = -\frac{15}{4}$$

۱۴۸- فاصلہ نقطہ ماکسیمم نسبی تابع با ضابطہ $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ از نیمساز ناحیہ اول کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{2}$

ابتدا نقاط بحرانی تابع را تعیین می کنیم . ($f'(x) = 0$)

$$f'(x) = 1 + \frac{-2(x-2)}{2\sqrt{4x-x^2}} = 0 \longrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{4x-x^2}} = 1 \rightarrow x-2 = \sqrt{4x-x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان 2}} x^2 - 4x + 4 = 4x - x^2 \rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = 8 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \implies f(x_1) = f(2 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$$

max نسبی

$$x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \implies f(x_2) = f(2 - \sqrt{2}) = 2$$

min نسبی

باید فاصله نقطه $(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$ از خط $y = x$ را محاسبه کنیم:

$$\frac{|2 + \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

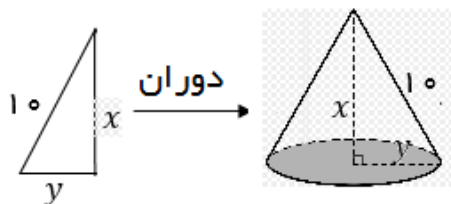
۱۴۹- از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{1}$

(۳) $\frac{3}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{3}}{1}$

(۱) $\frac{2}{1}$



$$100 = x^2 + y^2 \rightarrow y^2 = 100 - x^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 x \rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(100 - x^2)x$$

باید $\max$ تابع $V = \frac{1}{3}\pi(100x - x^3)$ را محاسبه کنیم. نقطه ای که در آن تابع بیشترین مقدار را دارد، متشاق تابع در آن نقطه صفر می شود. (نقطه بحرانی)

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3x^2) = 0 \implies x^2 = \frac{100}{3} \xrightarrow{\text{رابطه بین } x \text{ و } y} y^2 = \frac{200}{3}$$

$$\frac{y^2}{x^2} = 2 \rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

۱۵۰- به چند طریق می توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

(۴) ۹۵

(۳) ۹۱

(۲) ۸۷

(۱) ۸۴

از تمام حالات، حالتی که دو دوست با هم آمده اند را بر می داریم:

$$\binom{9}{5} - \binom{9-2}{5-2} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} - \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 9 \times 7 \times 2 - 7 \times 5 = 7(18 - 5) = 91$$

• بجای محاسبه $\binom{9}{5}$ ، حاصل $\binom{9}{4}$ را بدست می آوریم.

• وقتی می خواهیم دو دوست با هم به مهمانی بیایند آن دو نفر را انتخاب کرده، از ۷ نفر باقی مانده ۳ نفر دیگر را انتخاب می کنیم.

۱۵۱- پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

$$\frac{1}{56} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{28} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{21} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{14} \quad (۱)$$

$$\text{احتمال} = \frac{\text{حالات مطلوب}}{\text{کل حالات}}$$

کتاب های فارسی را در یک بسته کنار هم و کتاب های انگلیسی را در یک بسته کنار هم در نظر می گیریم

$$\text{احتمال} = \frac{\overbrace{2!}^{\text{جابجایی بسته ها}} \times \overbrace{5!}^{\text{جابجایی کتب فارسی}} \times \overbrace{3!}^{\text{جابجایی کتب انگلیسی}}}{8!} = \frac{1}{28}$$



فارسی



انگلیسی

۱۵۲- ضریب تغییرات داده‌های آماری به صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	۱۰ ، ۱۰ ، ۱۰ ، ۱۰ ، ۱۰ ، ۱۱ ، ۱۱ ، ۱۱ ، ۱۱ ، ۱۴ ، ۱۴ ، ۱۴ ، ۱۴ ، ۱۴ ، ۱۴ ، ۱۴
	۰/۱۸ (۴)

از همه داده ها 10 واحد کم می کنیم سپس میانگین می گیریم:

$$\bar{x} - 10 = \frac{5(0) + 4(1) + 7(4)}{16} = 2 \implies \bar{x} = 12$$

$$\sigma^2 = \frac{5(-2)^2 + 4(-1)^2 + 7(2)^2}{16} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4} = 3/25 \implies \sigma = \sqrt{3/25} = 1/8$$

• از آنجا که می دانیم $18^2 = 324$ است، $\sqrt{3/25}$ را به طور تقریبی $1/8$ در نظر گرفتیم.

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1/8}{12} = 0/15$$

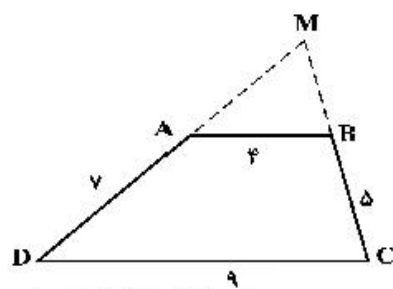
۱۵۳- مثلثی با رأس‌های $A(1, 5)$ ، $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ ، مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC ، کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) ۵ (۴) $4\sqrt{2}$

برای محاسبه ارتفاع AH کافیهست فاصله نقطه A را از پاره خط BC بدست آوریم.

با توجه به اینکه عرض نقاط B و C چهار واحد از طول خودشان کمتر است معادله خط بدون نوشتن روابط قابل حدس زدن است: $x - y - 4 = 0 \leftarrow y = x - 4$

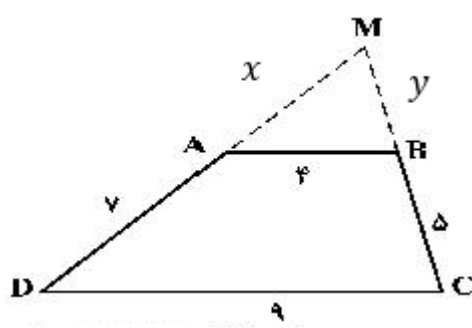
$$AH = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

۱۵۴- اندازه اضلاع متوازی الاضلاع $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB ، کدام است؟



- (۱) $13/2$
 (۲) $13/6$
 (۳) $14/4$
 (۴) $14/8$

با استفاده از قضیه تالس $MA = x$ و $MB = y$ را محاسبه می کنیم:

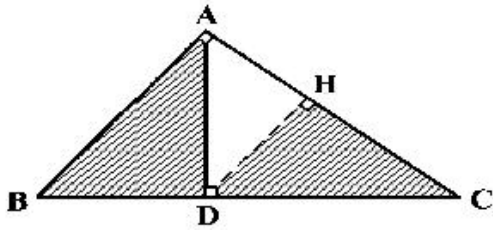


$$\frac{x}{x+7} = \frac{4}{9} \rightarrow 9x = 4x + 28 \rightarrow 5x = 28 \rightarrow x = \frac{28}{5} = 5\frac{3}{5}$$

$$\frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \rightarrow 4y + 20 = 9y \rightarrow 5y = 20 \rightarrow y = 4$$

$$\text{محیط مثلث } MAB = x + y + 4 = 5\frac{3}{5} + 4 + 4 = 13\frac{3}{5}$$

۱۵۵- در مثلث قائم الزاویه ABC ، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{3}$ و $AC = 2$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم الزاویه ABD و HCD کدام است؟



- (۱) $\frac{3}{7}$
(۲) $\frac{4}{7}$
(۳) $\frac{16}{21}$
(۴) $\frac{8}{9}$

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = 3 + 4 \rightarrow BC = \sqrt{7}$$

به طور واضح دو مثلث ABD و HCD متشابه اند.

می دانیم در دو مثلث متشابه اگر نسبت تشابه بین اضلاع k باشد، نسبت مساحت آن دو مثلث k^2 است:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{HCD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2$$

• از اضلاع نسبت دو وتر را نوشتیم.

برای محاسبه CD می دانیم در هر مثلث قائم الزاویه هر ضلع واسه هندسی بین تصویر خودش روی وتر و وتر است:

$$(AC)^2 = CD \times BC \rightarrow CD = \frac{(AC)^2}{BC} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{HCD}} = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\frac{4}{\sqrt{7}}}\right)^2 = \frac{3}{\frac{16}{7}} = \frac{21}{16} \rightarrow \text{گزینه ۳}$$

- در سوال 128، طراح باقی مانده تقسیم را می خواست نه حاصل تقسیم!!!
- در سوال 154، چهار ضلعی $ABCD$ دوزنقه است، نه متوازی الاضلاع!!!