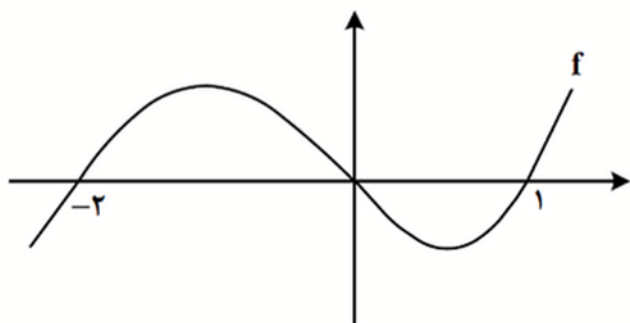


۱۱۱- نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(x+2)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

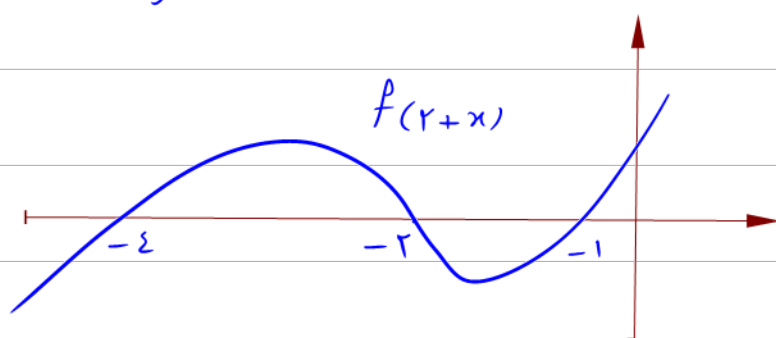


- ۳ (۱) ✓
۶ (۲)
۴ (۳)
۵ (۴)

$$-\frac{f(x)}{f(x+2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(x+2)} \leq 0$$

با توجه به شکل داده شده $D_f = \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, & f(x+2) < 0 \\ \text{و} \\ f(x) \leq 0, & f(x+2) > 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, & f(x+2) < 0 \Rightarrow [-2, 0] \cup [1, \infty) \cap (-2, -1) \cup (-\infty, -2) \\ \Rightarrow (-2, -1) \quad (1) \\ f(x) \leq 0, & f(x+2) > 0 \Rightarrow (-\infty, -2] \cup [0, 1] \cap (-2, -2) \cup (-1, +\infty) \\ \Rightarrow (-2, -2) \cup [0, 1] \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \cup (2) \Rightarrow (-2, -1) \cup (-2, -2) \cup [0, 1] \Rightarrow \underbrace{-3, 0, 1}_{\text{۳ عدد صحیح}}$$

۱۱۲- اگر $f(x) = 2[x] - x$ و $g(x) = f([x + f(x)])$ باشد، $\text{gof}(-\frac{5}{3})$ کدام است؟

۶ (۴)

-۶ (۳) ✓

-۴ (۲)

۴ (۱)

$$g \circ f(-\frac{5}{3}) = g(f(-\frac{5}{3})) \quad f(-\frac{5}{3}) = 2[-\frac{5}{3}] - (-\frac{5}{3}) = -\frac{10}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow g(-\frac{5}{3}) = f([- \frac{5}{3} + f(-\frac{5}{3})]) \quad f(-\frac{5}{3}) = 2[-\frac{5}{3}] - (-\frac{5}{3}) = -\frac{10}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow g(-\frac{5}{3}) = f([- \frac{5}{3} - \frac{5}{3}]) = f(-\frac{10}{3}) = 2[-\frac{10}{3}] - (-\frac{10}{3}) = -\frac{20}{3} + \frac{10}{3} = -\frac{10}{3}$$

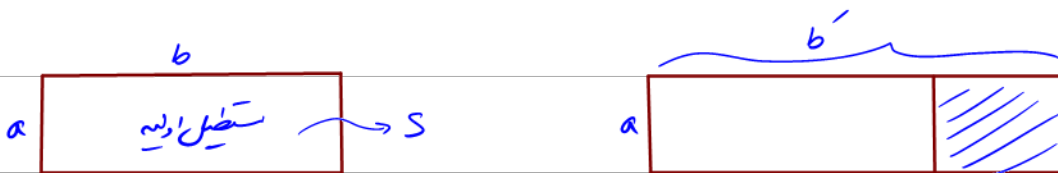
۱۱۳- نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟

$\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$ (۴) ✓

$\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (۳)

$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ (۲)

$\frac{1}{3} + \sqrt{5}$ (۱)



$$\frac{b}{a} = \frac{5}{4}, \quad \text{مستطیل طلایی} \quad \frac{b'}{a} = \frac{b+a}{b} \Rightarrow b'^2 - ab' - a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow b' = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2} = a(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2})$$

$$\Rightarrow b' = a(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}) \quad \text{و}$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{ab'}{ab} = \frac{a(\frac{1 + \sqrt{5}}{2})}{\frac{5}{4}a} = \frac{2}{5}(1 + \sqrt{5}) = \frac{1}{5}(1 + \sqrt{5})$$

۱۱۴- ریشه‌های معادله $2x^2 - ax + b = 0$ نیم‌واحد از ریشه‌های معادله $2ax^2 + ax - 6 = 0$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{4}\right]$

کدام است؟

-۱ (۴)

-۲ (۳) ✓

-۳ (۲)

-۴ (۱)

باتوجه به اینکه ریشه‌های معادله اول، نیم واحد از ریشه‌های معادله دوم بیشتر است بنابراین مجموع ریشه‌های معادله اول، یک واحد از مجموع ریشه‌های معادله دوم بیشتر است.

$$\alpha + \beta = \frac{a}{r}, \quad \alpha' + \beta' = \frac{-a}{ra} = -\frac{1}{r} \Rightarrow \alpha' = -\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{r} \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\alpha\beta = \frac{b}{r}, \quad \alpha'\beta' = (\alpha - \frac{1}{r})(\beta - \frac{1}{r}) = \alpha\beta - \frac{1}{r}(\alpha + \beta) + \frac{1}{r^2} = -\frac{7}{ra} = -\frac{3}{ra}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{b}{r} = -\frac{3}{ra} \Rightarrow b = -6 \Rightarrow \left[\frac{ab}{c} \right] = \left[\frac{-6}{2} \right] = -3$$

۱۱۵- اگر $f(x) = (x + \log x)^5$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(f \circ f)(x) < f(x^5)$ کدام است؟

(۱) $(0, 5)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(5, +\infty)$ (۴) $(1, +\infty)$

بازرسی کنیم تابع $f(x)$ ابتدا صعودی است، خالص است.

$$f(f(x)) < f(x^5) \Rightarrow f(x) < x^5 \Rightarrow (x + \log x)^5 < x^5 \Rightarrow x + \log x < x$$

$$\Rightarrow \log x < 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$$

۱۱۶- صفرهای تابع $y = 2x^2 - (m+2)x + m$ و نقطه تقاطع آن با محور عرضها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت

این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام می تواند طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ باشد؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

$$y = 2x^2 - (m+2)x + m \Rightarrow \text{مجموع ضرایب معادله دربرابر صفر است} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{m}{2} \end{cases}$$

$$x=0 \Rightarrow y=m$$

$$S = \frac{1}{2} |m(\frac{m}{2} - 1)| = \frac{3}{2} \Rightarrow |m(\frac{m}{2} - 1)| = 3$$

$$\Rightarrow |m(m-2)| = 3 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \quad \text{معادله } y = x^2 - mx + 1 \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{m}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۱۱۷- تابع $f(x) = \begin{cases} 2-3x & 2x+3 \leq 0 \\ 2+2mx-x^2 & 2x+3 > 0 \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون پذیر است. اگر f^{-1} وارون تابع f به ازای

مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-1}(-19)$ کدام است؟

۴) صفر

۳) ۱

۲) ۲

۱) ۳ ✓

$$f(x) = \begin{cases} 2-3x & x \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow R_f = [\frac{13}{2}, \infty) \\ 2+2mx-x^2 & x > -\frac{3}{2} \Rightarrow 2+2m(-\frac{3}{2}) - (-\frac{3}{2})^2 \leq \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 - 9/2 - 3m \leq \frac{13}{2} \Rightarrow -3m \leq \frac{13}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow -3m \leq \frac{14}{2}$$

$$\Rightarrow m \geq -\frac{7}{3} \quad (1) \quad \text{برای } x=m \Rightarrow 2+2m^2-m^2 < \frac{13}{2}$$

$$\text{برای } x=m \Rightarrow m \leq -\frac{3}{2} \quad (2) \quad \Rightarrow m^2+2 < \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow m^2 < \frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}} < m < \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow m = -2 \quad f^{-1}(-19) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -19$$

$$\Rightarrow 2 - 2\alpha - \alpha^2 = -19 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 21 = 0 \Rightarrow (\alpha+7)(\alpha-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -7 & \text{غلط} \\ \alpha = 3 & \text{درست} \end{cases}$$

۱۱۸- اگر $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.4$ باشد، اختلاف ریشه‌های معادله $x^2(\log 30) + 2x(\log 6) - \log \frac{5}{6} = 0$ چقدر

است؟

۱ (۴)

۱/۴ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۷ (۱)

$$\log 30 = \log 3 + \log 10 = 1.4 \quad \log 6 = \log 2 + \log 3 = 0.7$$

$$\log \frac{5}{6} = \log 5 - \log 6 = (\log 10 - \log 2) - (\log 2 + \log 3) = 0.7 - 0.7 = 0$$

$$\Rightarrow 1.4x^2 + 1.4x = 0 \Rightarrow 1.4x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{تفاوت} = 1$$

۱۱۹- اگر $\tan x + \cot x = -3$ و $3\pi < 4x < 4\pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x}$ کدام است؟

۰/۵√۶ (۴)

-۰/۷۵√۳ (۳)

۰/۷۵√۳ (۲)

-۰/۵√۶ (۱)

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -3 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = -3 \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{1}{3}$$

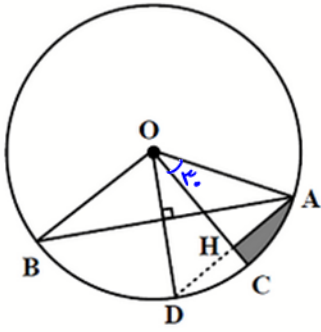
$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x + \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$3\pi < 4x < 4\pi \Rightarrow \frac{3}{2}\pi < x < \pi \Rightarrow \sin x + \cos x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = -\sqrt{\frac{1}{3}}(1 + \frac{1}{3}) = -\frac{4}{9}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{1}{-\frac{4}{9}\sqrt{3}} = -\frac{9}{4\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

۱۲۰- مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π ، $\hat{AOB} = 120^\circ$ و OH عمود منصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟



$\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$ (۱) ✓

$\sqrt{2} - \frac{\pi}{6}$ (۲)

$\pi - \sqrt{3}$ (۳)

$\pi - \sqrt{2}$ (۴)

$S = \pi \Rightarrow R = 1 \Rightarrow |OA| = 1 \Rightarrow |AH| = \frac{1}{2}|OA| = \frac{1}{2}$

$(OH)^2 + (AH)^2 = (OA)^2 \Rightarrow |OH| = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |OH| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

AC طول $\rho = R\alpha = 1 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ $|HC| = |OC| - |OH| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

اختلاف محیط = $(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

۱۲۱- خطوط $3y + x = -9$ و $ax - y = 3$ ، یکدیگر را در نقطه A و خط $y - x = 0$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC مقدار $\tan(B - C)$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲) ✓

$\frac{1}{4}$ (۱)

$\begin{cases} 3y + x = -9 \\ ax - y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3(ax - 3) + x = -9 \Rightarrow 3ax - 9 + x = -9 \Rightarrow x = 0$
 $ax - y = 3 \Rightarrow y = ax - 3 \Rightarrow A(0, -3)$

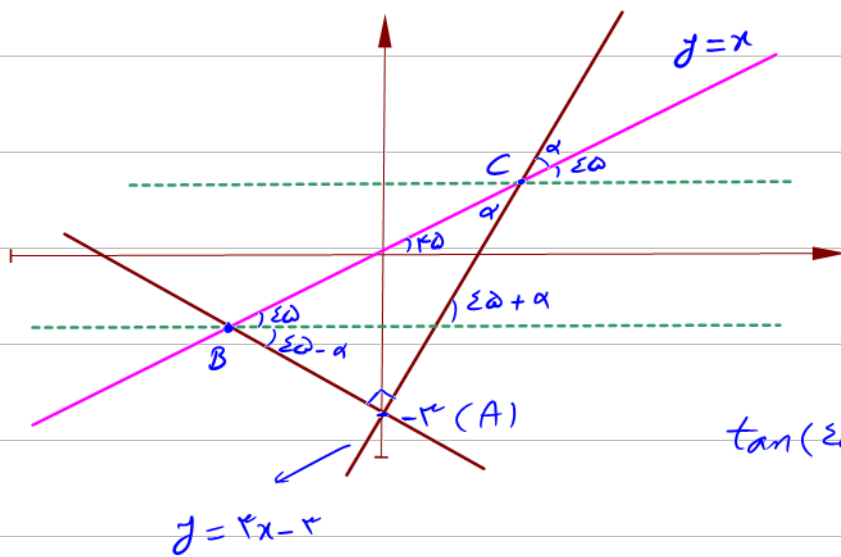
$\begin{cases} 3y + x = -9 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x + x = -9 \Rightarrow x = -\frac{9}{2} = y \Rightarrow B(-\frac{9}{2}, -\frac{9}{2})$

$\begin{cases} ax - y = 3 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow ax - x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{a-1} = y \Rightarrow C(\frac{3}{a-1}, \frac{3}{a-1})$

از انجایی که مرکز دایره برنمای اول رسوم واقع است می توان نتیجه گرفت مرکز دایره بر روی خط گذرنده از

سا B , C است $\hat{A} = 90^\circ$

$(a = r)$



$$\tan(\Sigma\omega + \alpha) = (r_2 - r_1) \cot \frac{\theta}{2}$$

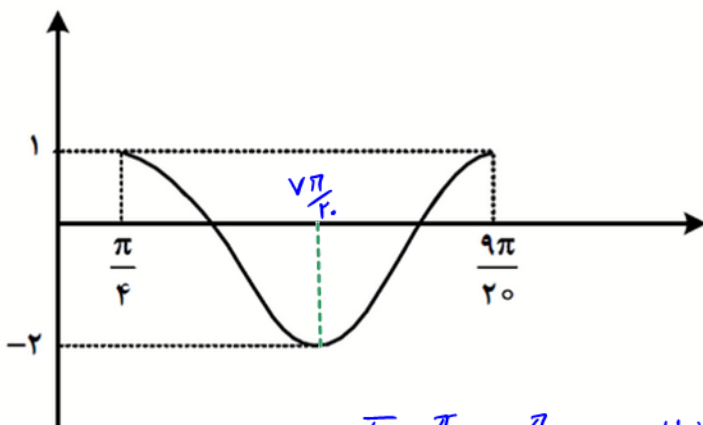
$$\tan(\angle\omega + \alpha) = r$$

$$\tan r(\xi\omega + \alpha) = \frac{r \tan(\xi\omega + \alpha)}{1 - \tan^2(\xi\omega + \alpha)} = \frac{r \times r}{1 - q} = \frac{q}{1} = -\frac{r}{\xi}$$

$$\tan(\varphi_0 + \varphi) = -\cot(\varphi) = -\frac{r}{z} \Rightarrow \cot(\varphi) = \frac{r}{z}$$

$$\hat{B} - \hat{C} = (9. - \alpha) - (\alpha) = 9. - 2\alpha \quad \tan(9. - 2\alpha) = \cot 2\alpha = \frac{r}{z}$$

۱۲۲- شکل زیر، نمودار تابع $y = a \cos^2(bx - \frac{\pi}{4}) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



- 15 (1) ✓
 -15 (2)
 $7,5$ (3)
 $-7,5$ (4)

$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\omega} \Rightarrow |b| = \omega \Rightarrow b = \pm \omega \Rightarrow \boxed{b = \omega}$$

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1 \Rightarrow a \cos^r\left(2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + c = 1 \Rightarrow a + c = 1 \\ f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) &= -1 \Rightarrow a \cos^r\left(2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + c = -1 \Rightarrow c = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow ab = 12$$

۱۲۳- اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{1}{\sin(\frac{\pi+4x}{2})} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi+8x}{2})} = 0$ در بازه $[0, \pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(2\alpha)$

کدام است؟

$-\sqrt{3}$ (۴) ✓

$\sqrt{3}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{4}+2x)} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{4}+2x)} = 0 \Rightarrow \frac{-\sin 2x + \cos 2x}{(\cos 2x)(-\sin 2x)} = 0 \Rightarrow \sin 2x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x \cos 2x = \cos 2x \Rightarrow \cos 2x (2\sin 2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow \text{غ-ق} \\ \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{12}, \quad x = k\pi + \frac{5\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{12} \\ x_2 = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

$$\tan(2\alpha) = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

۱۲۴- مقدار غیرصفر حد $\lim_{x \rightarrow a} \frac{b\sqrt{2+\sqrt{x}} - 2b}{ax-b}$ کدام است؟

$\frac{1}{24}$ (۴)

$\frac{1}{48}$ (۳)

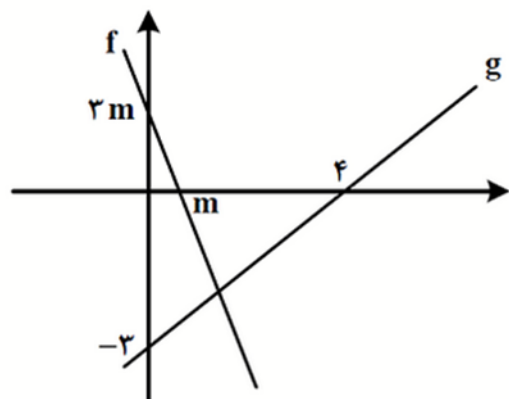
$\frac{1}{6}$ (۲) ✓

$\frac{1}{12}$ (۱)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{b\sqrt{2+\sqrt{x}} - 2b}{ax-b} = \frac{0}{0} \Rightarrow 1a-b=0 \Rightarrow \underline{b=1a}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow a} \frac{b \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{4}}}{a} = \frac{1a x^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{4}}}{2a} = \frac{1}{2}$$

۱۲۵- شکل زیر، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟



$$f \text{ تع } \Rightarrow (0, 3m)(m, 0)$$

$$\Rightarrow f(x) = -3x + 3m$$

$$g \text{ تع } \Rightarrow (0, -3)(4, 0) \Rightarrow g(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-3x + 3m|}{\frac{3}{4}x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{\frac{3}{4}x} = -4$$

(۱) -۳

(۲) ۳

(۳) -۴ ✓

(۴) ۴

۱۲۶- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2 + (m-1)x + (m-4)}}{|x^2 + ((m-7)x + a)^2|} & x \neq a \\ \frac{2 \sin b}{3\sqrt{x+2}} & x = a \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام می‌تواند باشد؟

(۴) $\frac{5\pi}{6}$

(۳) $\frac{5\pi}{3}$

(۲) $\frac{\pi}{6}$

(۱) $\frac{\pi}{3}$ ✓

$$x=a \text{ پیوسته در } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{3x^2 + (m-1)x + (m-4)}}{|x^2 + ((m-7)x + a)^2|} = \frac{\sqrt{3a^2 + (m-1)a + (m-4)}}{|a^2 + ((m-7)a + a)^2|}$$

$$\Rightarrow a^2 + ((m-7)a + a)^2 = a^2 + (m-6)^2 a^2 = a^2(a + m - 6) = 0 \begin{cases} a=0 \\ a=6-m \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(6-m)^2 + (m-1)(6-m) + m - 4 = 3(36 + m^2 - 12m) + (-m^2 + 7m - 6) + m - 4 = 2(m-7)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (m=7) \Rightarrow a = 6 - m = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 4x + 7}}{|x^2 + 1|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^2 + 1|} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^2 + 1|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{2 \sin b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{3}$$

۱۲۷- اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^3 - |x^3|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ کدام است؟

(۴) -۱

(۳) ✓

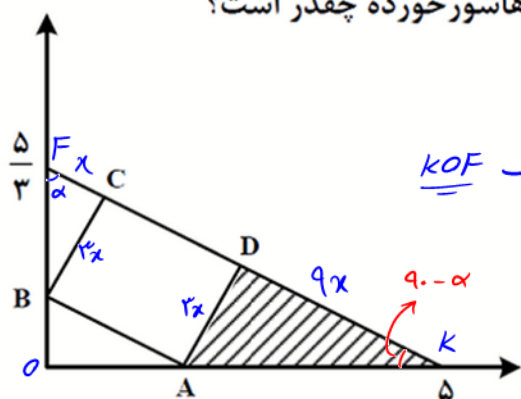
(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $-\frac{1}{2}$

$$(f \circ g)'(-\sqrt[3]{2}) = g'(-\sqrt[3]{2}) \times f'(g(-\sqrt[3]{2})) \quad x = -\sqrt[3]{2} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}} \\ g(x) = \frac{1}{2x^2} \end{cases}$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{2x^2}}} = x \Rightarrow (f \circ g)' = (x)' = 1$$

۱۲۸- در شکل زیر، مساحت مستطیل ABCD ماکزیمم است. مساحت مثلث هاشورخورده چقدر است؟



$$\frac{KOF}{\text{مستطیل}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{5}{12} = \frac{BC}{CF}$$

$$\Rightarrow BC = 5CF \quad CF = x \Rightarrow BC = 5x$$

$$(AD)^2 + (DK)^2 = (FK)^2 \Rightarrow (FK)^2 = \frac{250}{9}$$

$$\Rightarrow FK = \frac{5\sqrt{10}}{3}$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{AD}{DK} \Rightarrow DK = 9x$$

$$\Rightarrow S = 5x \left(\frac{5\sqrt{10}}{3} - x - 9x \right) = 5x \left(\frac{5\sqrt{10}}{3} - 10x \right) = \frac{25\sqrt{10}}{3}x - 50x^2$$

$$S' = 25\sqrt{10} - 100x = 0 \Rightarrow x = \frac{25\sqrt{10}}{100} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 5x \times 9x = \frac{45}{2} \times \frac{1}{(4)^2} = \frac{45 \times 5}{16 \times 4} = \frac{15}{16}$$

(۱) $\frac{15}{8}$

(۲) ✓ $\frac{15}{16}$

(۳) $\frac{25}{12}$

(۴) $\frac{25}{24}$

۱۳۰- چند عدد یازده رقمی با ارقام ۱ و ۲ می توان نوشت به طوری که مضرب ۶ باشند؟

۴۳۱ (۴)

۳۴۱ (۳) ✓

۲۲۱ (۲)

۱۳۱ (۱)

برای اینکه عدد مضرب ۶ باشد می بایست زوج بوده و بر ۳ نیز بخش پذیر باشد، بنابراین رقم یکان از رقم ۲ باید باشد.
برای رقم اول سه حالت داریم زیرا در صورتیکه مجموع ارقام بر ۳ بخش پذیر باشد.

عدد ۲	عدد ۱
۱	۱۰
۴	۷
۷	۴
۱۰	۱

$$\binom{10}{1} + \binom{10}{4} + \binom{10}{7} + \binom{10}{10} = 1 + 120 + 210 + 10 = 341$$

۱۳۱- یک سکه را آنقدر پرتاب می کنیم تا برای بار k ام «رو» ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، $\frac{k}{k+5}$

برابر احتمال آن است که در n پرتاب k بار سکه «رو» بیاید. کدام مقدار می تواند $n+k$ باشد؟

۵ (۴)

۸ (۳)

۹ (۲) ✓

۱۲ (۱)

$$\binom{n-1}{k-1} = \left(\frac{k}{k+5}\right) \binom{n}{k} \Rightarrow \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{k}{k+5} \times \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{(k-1)!} = \frac{k}{k+5} \times \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!} \Rightarrow \frac{n}{k+5} = 1 \Rightarrow n = k+5$$

$$k=2 \Rightarrow n=7 \Rightarrow n+k=9$$

۱۳۲- احتمال اینکه امیر برای قبولی در رشته پزشکی، یکی از سه دانشگاه A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، 0.4 ،

0.35 و 0.25 است. اگر او یکی از دانشگاه های A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، با احتمال 0.3 ، 0.25 و 0.35

در آن دانشگاه پذیرفته می شود. چند درصد احتمال دارد که امیر در رشته پزشکی قبول شود؟

۲۹/۲۵ (۴) ✓

۲۰/۲۵ (۳)

۲۹/۵۵ (۲)

۲۰/۵۵ (۱)

$$P = 0.4 \times 0.25 + 0.35 \times 0.3 + 0.25 \times 0.35 = 29/25$$

۱۳۳- نقاط $A(-1, 4)$ ، $B(3, 1)$ ، $C(x, y)$ و $D(-1-x, y+3)$ رؤوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های D و C مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۵ (۳) ✓

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CD} = \begin{pmatrix} (-1-x)-x \\ (y+3)-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2x \\ 3 \end{pmatrix}$$

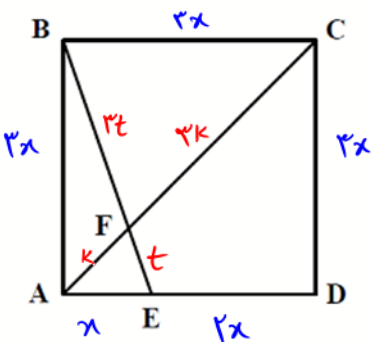
$$\Rightarrow 2x+1=4 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}-3 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ y-1 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \perp \vec{BC} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ y-1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y-1 = 4 \Rightarrow y=5$$

$$AB = \sqrt{(3+1)^2 + (1-4)^2} = 5 \quad BC = \sqrt{(1+1)^2 + (1-\frac{3}{2})^2} = \frac{5}{2}$$

$$ABCD = 2(5 + \frac{5}{2}) = 15$$

۱۳۴- در مربع شکل زیر، اندازه ED دو برابر AE است. طول EF چند برابر AF است؟



$$\frac{t}{k} = \frac{BE}{AC} = \frac{2t}{2k} = \frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{18}x} = \sqrt{\frac{10}{18}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$\frac{\sqrt{5}}{3}$ (۱) ✓

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{10}}{3}$ (۳)

$\frac{\sqrt{10}}{2}$ (۴)

۱۳۶- طول کوتاه‌ترین وتری که از $(-1, 2/5)$ در دایره $2x^2 + 2y^2 - 6x - 10y + 1 = 0$ رسم می‌شود، کدام است؟

$\frac{\sqrt{7}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ (۳)

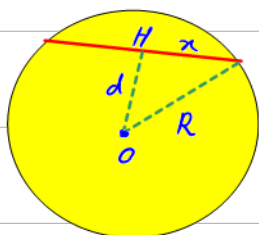
$\sqrt{7}$ (۲) ✓

$\sqrt{5}$ (۱)

صافه

$(-1, 2/5) \Rightarrow 2 + 2(2/5)^2 - 6(-1) - 10(2/5) + 1 < 0 \Rightarrow$ نقطه داخل دایره است

$H(-1, 2/5)$



$x^2 + y^2 - 3x - 5y + 1/2 = 0 \Rightarrow O(3/2, 5/2)$

$OH = 5/2, R = 2\sqrt{2}$

$R^2 = x^2 + d^2 \Rightarrow 8 = x^2 + (5/2)^2 \Rightarrow x^2 = 8 - 25/4 = 7/4 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{2}$

طول وتر $= 2x = \sqrt{7}$

۱۳۷- مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = 14$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های

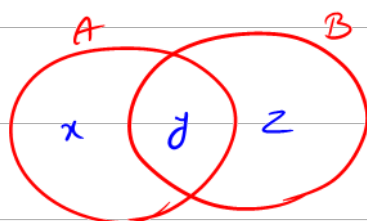
$A \cap B$ و $A \cup B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

۳ (۴) ✓

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)



$(x+y) - (y+z) = 14 \Rightarrow x - z = 14$

$(x+y+z) - y = x+z = 20$

$\Rightarrow x = 17, z = 3$

$n(B - A) = z = 3$

۱۳۸- در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d، تساوی $6a_7^2 = 5a_3a + 3a_9a$ برقرار است. نسبت جمله چهارم

دنباله به d، کدام می‌تواند باشد؟

۴ (۴)

۳/۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱) ✓

$6(a+d)^2 = 5a(a+rd) + 3a(a+d) \Rightarrow ra^2 + ad - 6d^2 = 0$

$\Rightarrow a = \frac{-d \pm \sqrt{29d^2}}{6} = \frac{-d \pm \sqrt{29}d}{6} = \begin{matrix} -rd \\ \frac{\sqrt{29}}{6}d \end{matrix} \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{a+rd}{d} = \begin{matrix} -rd \\ \frac{\sqrt{29}}{6}d \end{matrix}$

۱۲۹- در یک دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد زوج دیگر را اضافه می کنیم به طوری که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته های مختلف را تا جایی ادامه می دهیم که میانگین آن دسته (دسته آخر)، مجذور انحراف معیار باشد. اختلاف بزرگ ترین عضو دسته اول و آخر، کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲) ✓

۱۰ (۱)

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}} \bar{x} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \bar{x}^2, \quad \sigma^2 = \frac{n^2-1}{12} d^2 = \frac{49-1}{12} (2)^2 = 8 \times 2 = 16$$

$$\Rightarrow 16 = \frac{1}{n} \bar{x}^2 \Rightarrow \bar{x} = 8 \Rightarrow 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \quad \text{دسته اول}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \sigma^2 = 16 \Rightarrow 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 \Rightarrow 22 - 14 = 8 \quad \text{دسته آخر}$$

۱۳۹- اگر $A = \{\log_q x + 3 \log_{x^2} 3 : x > 1\}$ باشد، کوچک ترین عضو مجموعه A کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴) ✓

$\sqrt{6}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۱)

$$A = \log_{x^2} x + 3 \log_x^2 = \frac{1}{2} \log_x^2 + \frac{3}{2} \log_x^2 \quad \log_x^2 = t$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} t + \frac{3}{2} \times \frac{1}{t} \Rightarrow A' = \frac{1}{2} - \frac{3}{2t^2} = 0 \Rightarrow t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \log_x^2 + \frac{3}{2} \log_x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

۱۴۰- حداقل چند عضو از مجموعه $f = \left\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{72}{y^2-1} \right\}$ حذف شود تا f، یک تابع باشد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲) ✓

۲ (۱)

با توجه به آنکه $x, y \in \mathbb{Z}$ هستند بنابراین مرتباً عدد ۷۲ بر y^2-1 بخشیر باید پس داریم،

$$y^2-1 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72\}$$

$$\Rightarrow y^2 = 0, 2, 9, 10 \Rightarrow y = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 5 \Rightarrow \text{برای تابع بودن مرتباً ۳ عضو حذف شود.}$$