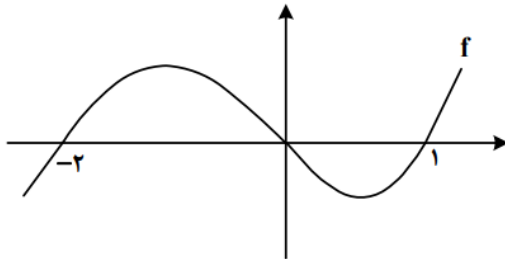


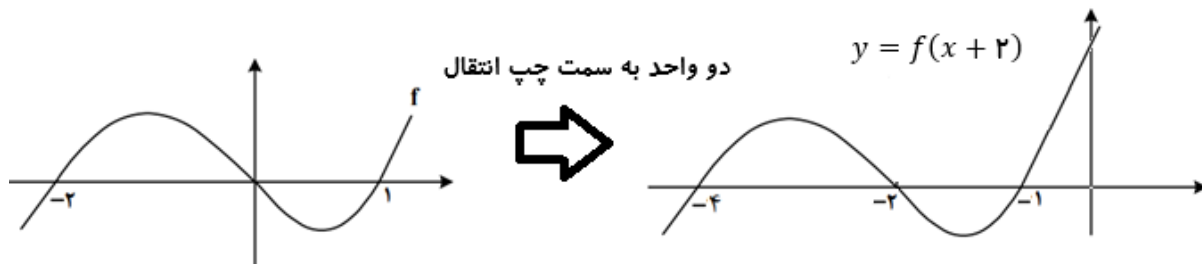
توسط: سید امید شفیعی

۱۱۱- نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(2+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



- ۳ (۱)
- ۶ (۲)
- ۴ (۳)
- ۵ (۴)

حل: نمودار تابع $y = f(x+2)$ همون نمودار $y = f(x)$ است که دو واحد به سمت چپ انتقال پیدا کرده.



حالا بریم جدول تعیین علامت رو بدست بیاریم:

x	$-\infty$	$-\varepsilon$	-2	-1	0	1	∞	
y	—	+	—	—	○	+	○	—

بازه $[0, 1) \cup (-4, -2)$ دامنه تابع است که فقط شامل اعداد صحیح صفر، ۱ و -۳ هستند.

۱۱۲- اگر $f(x) = 2[x] - x$ و $g(x) = f([x + f(x)])$ باشد، $\text{gof}(-\frac{5}{3})$ کدام است؟

- ۴ (۱)
- ۴ (۲)
- ۶ (۳)
- ۶ (۴)

حل: اول عبارت $f([x + f(x)])$ رو ساده کنیم. پس:

$$[x + f(x)] = [x + 2[x] - x] = [2[x]] = 2[x]$$

$$g(x) = f(2[x]) = 2[2[x]] - 2[x] = 4[x] - 2[x] = 2[x]$$

حالا مقدار $f(-\frac{5}{3})$ رو بدست بیاریم که برابر میشه با:

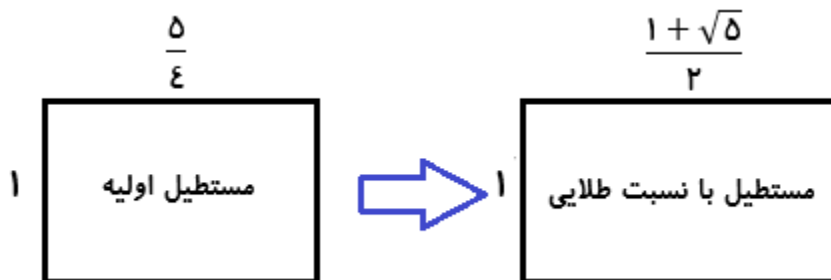
$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = 2\left[-\frac{5}{3}\right] - \frac{5}{3} = 2[-1/66] + \frac{5}{3} = 2(-2) + \frac{5}{3} = -4 + \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow g\left(f\left(-\frac{5}{3}\right)\right) = g\left(-\frac{7}{3}\right) = 2\left[-\frac{7}{3}\right] = 2[-2/3] = 2(-3) = -6$$

۱۱۳- نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟

- (۱) $0/3 + \sqrt{5}$ (۲) $0/2(1 + \sqrt{5})$ (۳) $0/6 + 0/2\sqrt{5}$ (۴) $0/4(1 + \sqrt{5})$

حل: نسبت طلایی برابر است با $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ که در مستطیل طلایی نسبت طول به عرض برابر با همین مقدار است. برای سادگی، عرض مستطیل رو ۱ واحد در نظر میگیریم. چون در مستطیل جدید نسبت طول به عرض برابر با نسبت طلایی است، طول این مستطیل برابر با $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ خواهد شد.



$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{5}(1 + \sqrt{5}) = 0/4(1 + \sqrt{5})$$

۱۱۴- ریشه‌های معادله $2x^2 - ax + b = 0$ نیم‌واحد از ریشه‌های معادله $2ax^2 + ax - 6 = 0$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{4}\right]$

کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

حل: اگر ریشه‌های معادله اول رو x فرض کنیم و ریشه‌های معادله دوم رو t ، رابطه $x = t + \frac{1}{2}$ برقرار است. پس:

$$t = x - \frac{1}{2} \Rightarrow 2ax\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + a\left(x - \frac{1}{2}\right) - 6 = 2ax^2 - ax - 6$$

معادله بدست اومده رو با معادله اول متحد قرار میدیم. بنابراین:

$$2ax^2 - ax - 6 \equiv 2x^2 - ax - 6 \Rightarrow a = 1, b = -6 \Rightarrow \left[\frac{ab}{4}\right] = \left[\frac{-6}{4}\right] = [-1/5] = -2$$

۱۱۵- اگر $f(x) = (x + \log x)^5$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $(f \circ f)(x) < f(x^5)$ کدام است؟
 (۱) $(0, 5)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(5, +\infty)$ (۴) $(1, +\infty)$

حل: چون تابع f اکیدا صعودی است، پس میتونیم نامعادله داده شده رو به صورت زیر ساده کنیم:

$$f(f(x)) < f(x^5) \Rightarrow f(x) < x^5 \Rightarrow (x + \log x)^5 < x^5 \Rightarrow x + \log x < x \\ \Rightarrow \log x < 0 \Rightarrow x < 1$$

از طرفی دامنه $\log x$ برابر با $x > 0$ میشه. پس جواب نهایی بازه $(0, 1)$ خواهد بود.

۱۱۶- صفرهای تابع $y = 2x^2 - (m+2)x + m$ و نقطه تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ باشد؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

حل: طول قاعده مثلث ایجاد برابر با اختلاف ریشه‌ها (صفرهای تابع) است. ارتفاع این مثلث نیز برابر با عرض از مبدا این تابع، یعنی m خواهد شد. در ادامه سوال حاصل $\frac{m}{4}$ خواسته شده است.

اختلاف ریشه‌ها برابر است با $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ که در این مسئله برابر است با:

$$\text{قاعده مثلث} = \frac{\sqrt{(m+2)^2 - 4(2)(m)}}{2} = \frac{\sqrt{m^2 + 4m + 4 - 8m}}{2} = \frac{\sqrt{m^2 - 4m + 4}}{2} = \frac{\sqrt{(m-2)^2}}{2} = \frac{|m-2|}{2}$$

مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{|m-2|}{2} \times |m| = \frac{|m(m-2)|}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow |m(m-2)| = 3$$

پس:

$$\begin{cases} m(m-2) = 3 \\ m(m-2) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 = 0 \\ m^2 - 2m + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1, m = 3 \\ \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

پس طول رأس سهمی برابر با $\frac{3}{4}$ یا $-\frac{1}{4}$ میشه. پس گزینه ۴ درسته. اگه $\frac{3}{4}$ هم در گزینه‌ها بود، درست میشد، برای همین در صورت سوال گفته: "کدام می‌تواند باشد".

۱۱۷- تابع $f(x) = \begin{cases} 2-3x & 2x+3 \leq 0 \\ 2+2mx-x^2 & 2x+3 > 0 \end{cases}$ روی دامنه تعریف خود، وارون پذیر است. اگر f^{-1} وارون تابع f به ازای مقدار صحیح m باشد، مقدار $f^{-1}(-19)$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

حل: برای اینکه این تابع معکوس پذیر باشد، اولاً هر ضابطه باید روی دامنه خودش یک به یک باشد. ثانیاً برد ضابطه‌ها با هم اشتراک نداشته باشد. برد ضابطه اول به صورت زیره:

$$2x + 3 \leq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow -3x \geq \frac{9}{2} \Rightarrow 2 - 3x \geq \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$

پس برد ضابطه دوم باید $(-\infty, \frac{13}{2})$ باشد. طول رأس سهمی برابر با m می‌شود و عرضش:

$$2 + 2m^2 - m^2 = 2 + m^2$$

طول رأس سهمی باید کمتر از $-\frac{3}{2}$ باشد. پس:

$$\begin{cases} m < -\frac{3}{2} \\ 2 + m^2 < \frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{2} \\ m^2 < \frac{9}{2} = 4.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{2} \\ m = -2, -1, 0, 1, 2 \end{cases}$$

پس فقط $m = -2$ قابل قبوله و ضابطه دوم به فرم $-x^2 - 4x + 2$ می‌شود. پس:

$$-x^2 - 4x + 2 = -19 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \Rightarrow (x + 7)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = -7, 3$$

چون $x > -\frac{3}{2}$ هست، پس ۳ قابل قبوله.

۱۱۸- اگر $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.4$ باشد، اختلاف ریشه‌های معادله $x^2(\log 30) + 2x(\log 6) - \log \frac{5}{6} = 0$ چقدر است؟

(۱) ۰.۷ (۲) ۰.۵ (۳) ۱/۴ (۴) ۱

حل: اختلاف ریشه‌های معادله درجه دوم همیشه $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ که در این سوال به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{4(\log 6)^2 + 4 \log 30 \cdot \log \left(\frac{5}{6}\right)}}{\log 30} = \frac{2\sqrt{(\log 6)^2 + (\log 5 + \log 6)(\log 5 - \log 6)}}{\log 30}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{(\log 6)^2 + (\log 5)^2 - (\log 6)^2}}{\log 30} = \frac{2 \log 5}{\log 30} = \frac{2(1 - \log 2)}{\log 3 + \log 10} = \frac{2(0.7)}{0.4 + 1} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

۱۱۹- اگر $\tan x + \cot x = -3$ و $3\pi < 4x < 4\pi$ باشد، حاصل $\frac{1}{\cos^3 x + \sin^3 x}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{5\sqrt{6}}{3}$ (۲) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (۳) $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

حل: میدونیم که $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$ همیشه. مقدار زاویه هم در بازه $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ قرار داره. در این ناحیه $\sin x > 0$ و $\cos x < 0$. البته زور کسینوس بیشتره، پس حاصل کسر باید منفی بشه. یعنی گزینه‌های ۲ و ۴ درست نیستن.

حالا بریم مقدارش رو بدست بیاریم.

$$\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)^3 - 3 \sin x \cos x (\cos x + \sin x)$$

از طرفی $\frac{1}{\sin x \cos x} = -3 \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{1}{3}$ میشه. پس:

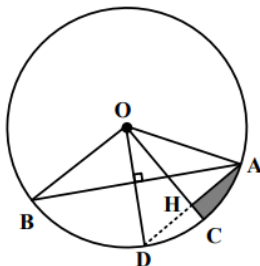
$$\begin{aligned} \cos^3 x + \sin^3 x &= (\cos x + \sin x)^3 - 3 \sin x \cos x (\cos x + \sin x) \\ &= (\cos x + \sin x)((\cos x + \sin x)^2 + 1) \\ &= (\cos x + \sin x)(1 + 2 \sin x \cos x + 1) = (\cos x + \sin x)\left(2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}(\cos x + \sin x) \end{aligned}$$

حالا باید $\cos x + \sin x$ رو بدست بیاریم. برای اینکار یه بار به توان ۲ میرسونیم و یه بار جذر میگیریم. البته میدونیم که مقدارش منفیه! پس:

$$\sqrt{(\cos x + \sin x)^2} = \sqrt{1 + 2 \sin x \cos x} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

پس حاصل $\cos^3 x + \sin^3 x$ برابر میشه با $-\frac{4}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$ و جواب مسئله برابر است با $-\frac{4}{3}\sqrt{3}$ یا به عبارت دیگه $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

۱۲۰- مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π ، $\angle AOB = 120^\circ$ و OH عمود منصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟



(۱) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

(۲) $\sqrt{2} - \frac{\pi}{6}$

(۳) $\pi - \sqrt{3}$

(۴) $\pi - \sqrt{2}$

حل: مساحت دایره برابر با πr^2 هست و در اینجا مساحت π شده. پس شعاع ۱ هست. محیط مثلث AOH برابر است با $OA + OH + AH$ میشه که در اینجا OA همون شعاع دایره‌اس، یعنی ۱. محیط ناحیه سایه زده هم برابر با $\widehat{AC} + HC + AH$ میشه. اختلاف این دو محیط میشه:

$$(1 + OH + AH) - (AH + HC + \widehat{AC}) = 1 + OH - HC - \widehat{AC} = 1 + OH - (1 - OH) - AC = 2OH - \widehat{AC}$$

زاویه $AOC = 30^\circ$ می‌باشد. پس $OH = OA \times \cos 30^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ طول کمان $\widehat{AC}$ هم برابر می‌باشد با حاصلضرب شعاع در زاویه (بر حسب رادیان). پس:

$$\widehat{AC} = r\theta = 1 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

پس اختلاف دو محیط برابر است با:

$$2OH - \widehat{AC} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$

۱۲۱- خطوط $ax - y = 3$ و $3y + x = -9$ یکدیگر را در نقطه A و خط $y - x = 0$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC مقدار $\tan(B - C)$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (4)$$

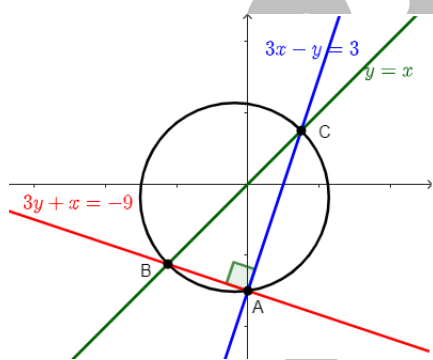
$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

حل: قطر BC کمان دایره را به دو کمان مساوی (180° درجه) تقسیم می‌کند. زاویه محاطی نصف کمان رو به رو است، پس زاویه A برابر با 90° درجه خواهد شد. بنابراین خطوط $ax - y = 3$ و $3y + x = -9$ بر هم عمود هستند. پس حاصلضرب شیب این دو خط باید -1 شود. لذا:

$$\left(-\frac{1}{3}\right)(a) = -1 \Rightarrow a = 3$$



برای محاسبه $\tan C$ و $\tan B$ نیاز داریم که طول اضلاع مثلث را بدست آوریم. برای همین مختصات نقاط A و B و C رو بدست می‌آوریم. با تلاقی این خطوط با هم مختصات این سه نقطه به ترتیب برابر با $(0, -3)$ ، $(-\frac{9}{4}, -\frac{9}{4})$ و $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ خواهد شد. پس:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{10}$$

$$AC = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

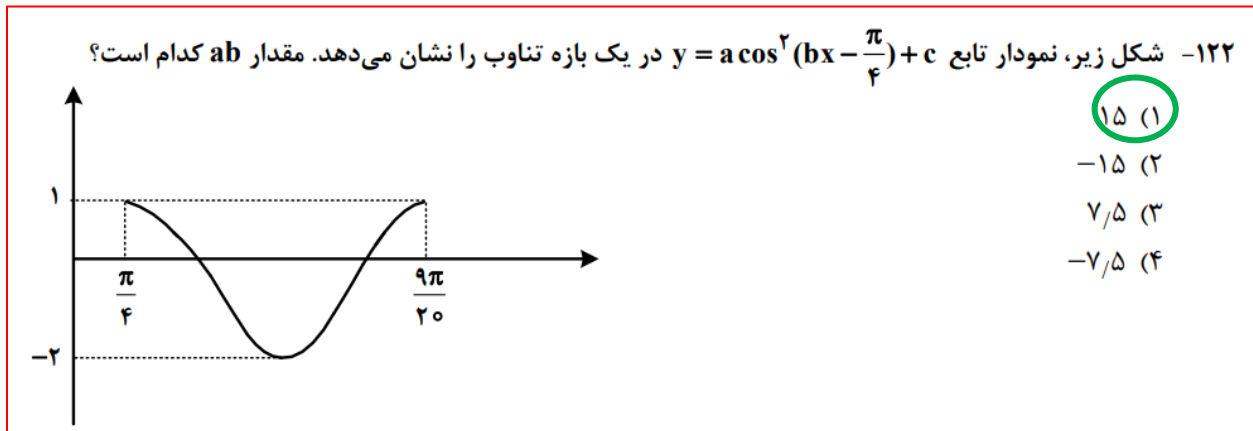
در صورت سوال مقدار $\tan(B - C)$ خواسته شده که برابر است با $\frac{\tan B - \tan C}{1 + \tan B \tan C}$

میدونیم که $B + C = 90^\circ$ پس $\tan C = \cot B$ بنابراین:

$$\tan(B - C) = \frac{\tan B - \cot B}{1 + \tan B \cot B} = \frac{\tan B - \cot B}{2}$$

پس، $\tan B = \frac{AC}{AB} = 2$ و $\cot B = \frac{1}{2}$. بنابراین:

$$\tan(B - C) = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$



حل: دوره تناوب برابر است با $\frac{\pi}{\frac{9\pi}{20} - \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\frac{11\pi}{20}} = \frac{20}{11}$. از طرفی می‌دانیم که دوره تناوب تابع $\cos^2 \alpha$ نصف دوره تناوب $\cos \alpha$ همیشه. پس:

$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow b = \pm 5$$

برد تابع $a \cos^2(bx - \frac{\pi}{4})$ هم بازه $[0, a]$ هست، پس c باید -۲ باشد. همچنین $a + c = 1$ باید باشد، پس $a = 3$ همیشه. حالا ببینیم که b مثبت یا منفی؟! مقدار این تابع در $\frac{\pi}{4}$ باید ۱ بشه. پس:

$$\text{if } b = -5 \Rightarrow y = 3 \cos^2\left(-5\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right) - 2 = 3 \cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = -2 \neq 1$$

پس $b = 5$ همیشه و $ab = 15$. البته اگر نمودار رو هم ادامه میدادی مشخصه که b مثبت!

۱۲۳- اگر اختلاف جواب‌های معادله $\frac{1}{\sin(\frac{\pi+4x}{2})} + \frac{1}{\cos(\frac{\pi+8x}{2})} = 0$ در بازه $[0, \pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(2\alpha)$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (۳) $\sqrt{3}$
 (۴) $-\sqrt{3}$

حل: اول معادله رو ساده کنیم. می‌تونیم به جای $\cos 2x$ $\sin(\frac{\pi}{2} + 2x)$ و همچنین به جای $\cos(\frac{\pi+8x}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} + 4x) = -\sin 4x$ رو قرار بدیم. پس:

$$\frac{1}{\cos 2x} - \frac{1}{\sin 2x} = 0 \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x \Rightarrow \cos 2x = 2 \sin 2x \cos 2x \Rightarrow$$

چون $\cos 2x$ در مخرج کسر قرار گرفته و صفر نمیتونه باشه، پس از دو طرف معادله ساده‌اش می‌کنیم.
بنابراین:

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

چون جواب‌های در بازه $(0, \pi)$ رو خواسته، این دو جواب برابر با $\frac{\pi}{12}$ و $\frac{5\pi}{12}$ میشه که اختلافشون برابر با $\frac{\pi}{3}$ میشه. پس $\tan 2\alpha = \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

۱۲۴- مقدار غیر صفر حد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2b}{ax-b}$ کدام است؟

$\frac{1}{24}$ (۴)

$\frac{1}{48}$ (۳)

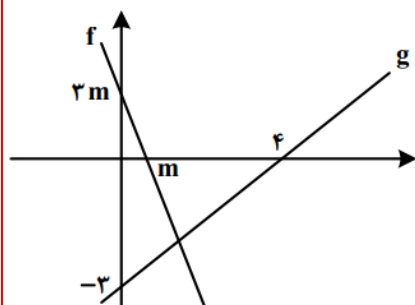
$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{1}{12}$ (۱)

حل: اگه به جای x مقدار ∞ رو بذاریم صفر میشه. پس مخرج هم قطعاً صفر بوده که حاصل حد یه عدد حقیقی غیر صفر شده. پس مخرج هم باید به ازای این مقدار صفر بشه، یعنی $a = \frac{b}{\infty} \Rightarrow a = 0$. پس حد رو میتونیم به حد زیر تبدیل کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2)}{\frac{b}{\infty}x-b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2)}{b(\frac{1}{\infty}x-1)} \Rightarrow \text{hop: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{6}$$

۱۲۵- شکل زیر، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟



-۳ (۱)

۳ (۲)

-۴ (۳)

۴ (۴)

حل: برای محاسبه حد در بی نهایت کافیست پرتوان صورت رو در نظر بگیریم و پرتوان مخرج. شیب تابع $g(x)$ برابر با $\frac{\epsilon}{3}$ میشه. در واقع ضابطه این تابع به صورت $g(x) = \frac{\epsilon}{3}x - 3$ میشه و ضابطه $f(x)$ هم به صورت $f(x) = -3x + 3m$ پس:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-3x+3m|}{\frac{\epsilon}{3}x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-3x|}{\frac{\epsilon}{3}x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{\frac{\epsilon}{3}x} = -\epsilon$$

۱۲۶- اگر تابع $f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام می تواند باشد؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2 + (m-1)x + (m-4)}}{|x^3 + ((m-7)x + a)^2|} & x \neq a \\ \frac{2 \sin b}{3\sqrt{x+2}} & x = a \end{cases}$$

(۱) $\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{\Delta\pi}{3}$ (۴) $\frac{\Delta\pi}{6}$

حل: برای اینکه تابع در R پیوسته باشه، اولاً هر ضابطه روی دامنه خودش باید پیوسته باشه. ثانیاً باید شرط پیوستگی رو در نقطه (نقاط) تغییر ضابطه بررسی کنیم. در ضابطه اول عبارت زیر رادیکال یه ریشه ۱- داره. چون $m - \epsilon + 3 = m - 1$ میشه. ۱- ریه مخرج هم هست که در این صورت برای اینکه این تابع پیوسته باشه، باید این ریشه مضاعف باشه تا از زیر رادیکال بیاد بیرون و یه ریشه ساده به ما تحویل بده. در غیر اینصورت حاصل کسر بی نهایت میشه و تابع نمیتونه پیوسته باشه. پس عبارت زیر رادیکال به فرم $3(x+1)^2$ باید باشه یا $3x^2 + 6x + 3$. پس $m = 7$ میشه و تابع رو میتونیم به فرم زیر بازنویسی کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3+a^2|} & x \neq a \\ \frac{2 \sin b}{3\sqrt{x+2}} & x = a \end{cases}$$

پس $a = -1$ میشه. حالا بریم حاصل حد این تابع در این نقطه رو بدست بیاریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3+1|} = \sqrt{3} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1||x^2-x+1|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

برای پیوسته بودن باید مقدار این با مقدار تابع در این نقطه، یعنی $\frac{2}{3} \sin b$ برابر باشه. پس:

$$\frac{2}{3} \sin b = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{3}$$

۱۲۷- اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^3-|x^3|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ کدام است؟

(۴) -۱

(۳) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

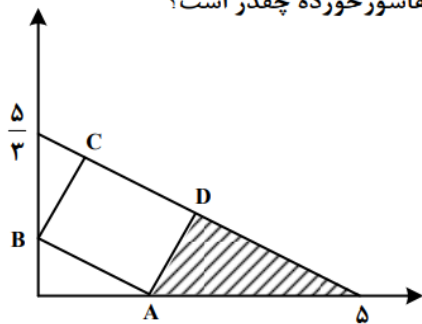
(۱) $-\frac{1}{2}$

حل: مقدار خواسته شده برابر است با $(f(g(x)))'$. پس میتونیم اول $f \circ g(x)$ رو تشکیل بدیم، بعد ازش مشتق بزنیم. میدونیم که تابع g برای مقادیر مثبت تعریف نشده اس. چون مخرج صفر مطلق میشه، برای مقادیر منفی هم برابر با $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3}}$ میشه. تابع f هم فقط برای مقادیر منفی تعریف شده اس که به فرم $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$ تبدیل میشه. پس:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2x^3}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2x^3}}\right)^3}} = x \Rightarrow f \circ g(x) = x \Rightarrow (f(g(x)))' = 1$$

پس مشتق تابع $f \circ g(x)$ در هر نقطه ای برابر با ۱ میشه.

۱۲۸- در شکل زیر، مساحت مستطیل ABCD ماکزیمم است. مساحت مثلث هاشور خورده چقدر است؟



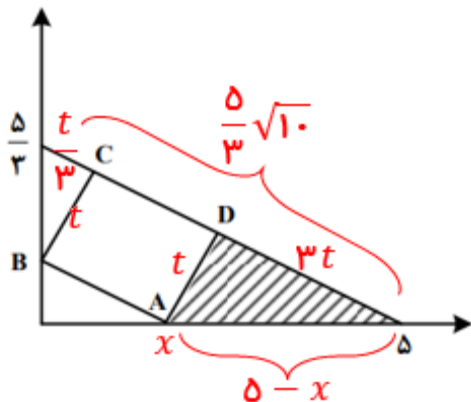
(۱) $\frac{15}{8}$

(۲) $\frac{15}{16}$

(۳) $\frac{25}{12}$

(۴) $\frac{25}{24}$

حل: مساحت مستطیل برابر است با:



$$S = t \left(\frac{5}{3} \sqrt{10} - 3t - \frac{t}{3} \right) = \frac{5}{3} \sqrt{10} t - \frac{10}{3} t^2 \Rightarrow$$

$$S' = \frac{5}{3} \sqrt{10} - \frac{20}{3} t = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} t (3t) = \frac{3}{2} t^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{10}}{4} \right)^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{10}{16} \right) = \frac{15}{16}$$

۱۲۹- در یک دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد زوج دیگر را اضافه می کنیم به طوری که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته های مختلف را تا جایی ادامه می دهیم که میانگین آن دسته (دسته آخر)، مجذور انحراف معیار باشد. اختلاف بزرگ ترین عضو دسته اول و آخر، کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

حل: اعداد دسته اول رو به صورت $a - 6, a - 4, a - 2, a, a + 2, a + 4, a + 6$ در نظر می گیریم. انحراف معیار این اعداد برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{6^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2}{7} = \frac{2 \times 56}{7} = 16 \Rightarrow \sigma = 4$$

طبق اطلاعات صورت مسئله $\sigma = \frac{\bar{x}_1}{\sqrt{7}}$. پس میانگین دسته اول ۸ است، یعنی داده وسط. پس بزرگترین عدد این دسته ۱۴ است.

انحراف معیار دسته آخر هم همین میشه، چون اعداد متوالی هستند. طبق اطلاعات صورت مسئله $\bar{x}_2 = \sigma^2$. پس میانگین دسته آخر برابر است با ۱۶. پس داده وسط این دسته ۱۶ است و بزرگترین داده آن ۲۲ است. پس اختلاف این دو عدد برابر است با $22 - 14 = 8$.

۱۳۰- چند عدد یازده رقمی با ارقام ۱ و ۲ می توان نوشت به طوری که مضرب ۶ باشند؟

۴۳۱ (۴)

۳۴۱ (۳)

۲۲۱ (۲)

۱۳۱ (۱)

حل: چون عددمون باید مضرب ۶ باشه، پس هم باید بر ۲ بخش پذیر باشه و هر بر ۳. برای اینکه بر ۲ بخش پذیر باشه، رقم یکان باید صفر یا زوج باشه، که در این مسئله فقط میتونیم از ۲ استفاده کنیم. در ده رقم اول اگه n تا ۲ داشته باشیم، پس تعداد $n - 10$ تا ۱ داریم. در این صورت مجموع ارقام به صورت زیر میشه:

$$2n + 10 - n + 2 = n + 12 \Rightarrow \text{باید مضرب ۳ باشه}$$

پس n میتونه صفر، ۳، ۶، ۹ باشه.

اگه $n = 0$ باشه، یعنی عددمون ۱۱۱۱۱۱۱۱۲ میشه که فقط یک حالت. اگه $n = 3$ باشه، پس ۳ تا دو داریم که میتونن در جایگاه های ۱ تا ۱۰ قرار بگیرین که میشه انتخاب ۳ جایگاه از ۱۰ جایگاه، یعنی $\binom{10}{3}$. پس کل حالات ممکن برابر میشه با:

$$1 + \binom{10}{3} + \binom{10}{6} + \binom{10}{9} = 1 + 120 + 210 + 10 = 341$$

۱۳۱- یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار k ام «رو» ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، $\frac{k}{k+\delta}$ برابر احتمال آن است که در n پرتاب k بار سکه «رو» بیاید. کدام مقدار می‌تواند $n+k$ باشد؟

(۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۸ (۴) ۵

حل: اگر سکه‌ای را n بار پرتاب کنیم و بخواهیم که k امین «رو» را در آخرین پرتاب ببینیم، پس در $n-1$ پرتاب اول، باید $k-1$ «رو» مشاهده کنیم که به $\binom{n-1}{k-1}$ حالت ممکن است. کل فضای نمونه هم که برابر با 2^n است که در مخرج قرار میگیره و با هم ساده میشن. از طرفی برای اینکه در n پرتاب k «رو» مشاهده شود، به $\binom{n}{k}$ حالت ممکن است. نسبت احتمال این دو حالت باید $\frac{k}{k+\delta}$ شود. پس:

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{k+\delta} \Rightarrow \frac{k}{n} = \frac{k}{k+\delta} \Rightarrow n = k + \delta \Rightarrow n + k = k + \delta + k = 2k + \delta$$

پس n می‌تواند، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳ یا ... باشد. پس گزینه ۲ درست است.

۱۳۲- احتمال اینکه امیر برای قبولی در رشته پزشکی، یکی از سه دانشگاه A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، ۰/۴، ۰/۳۵ و ۰/۲۵ است. اگر او یکی از دانشگاه‌های A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، با احتمال ۰/۳، ۰/۲۵ و ۰/۳۵ در آن دانشگاه پذیرفته می‌شود. چند درصد احتمال دارد که امیر در رشته پزشکی قبول شود؟

(۱) ۲۰/۵۵ (۲) ۲۹/۵۵ (۳) ۲۰/۲۵ (۴) ۲۹/۲۵

حل: از قانون احتمال کل باید استفاده کنیم:

$$P(\text{قبولی پزشکی}) = P(A)P(\text{قبولی}|A) + P(B)P(\text{قبولی}|B) + P(C)P(\text{قبولی}|C) = (0/4 \times 0/25) + (0/35 \times 0/3) + (0/25 \times 0/35)$$

محاسبه عبارت فوق وقت‌گیره! چون جواب رو بر حسب درصد خواسته، کل عبارت رو باید در ۱۰۰ ضرب کنیم که به صورت زیر تبدیل میشه:

$$(40 \times 0/25) + (0/35 \times 30) + (0/25 \times 35) = (40 \times 0/25) + (0/25 \times 30 + 0/1 \times 30) + (0/25 \times 35)$$

حالا میتونیم از ۰/۲۵ فاکتور بگیریم. پس:

$$0/25(40 + 30 + 35) + 3 = 0/25(105) + 3 = \frac{105}{20} + 3 = 25 + 1/25 + 3 = 29/25$$

۱۳۳- نقاط $A(-1, 4)$ ، $B(3, 1)$ ، $C(x, y)$ و $D(-1-x, y+2)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های D و C مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟

(۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

حل: میدونیم در هر مستطیل رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + x = 3 - 1 - x \\ \varepsilon + y = 1 + y + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ \varepsilon + y = y + \varepsilon \end{cases}$$

از رابطه دوم نمیتونیم مقدار y رو بدست بیاریم. ولی میدونیم که طول AB بر عرض BC عمود است، یعنی حاصل ضرب شیبها برابر با -1 می‌شود. پس:

$$m_{AB} \times m_{BC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \times \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = -1 \Rightarrow \frac{1 - \varepsilon}{3 - (-1)} \times \frac{y - 1}{\frac{3}{2} - 3} = \frac{-3}{\varepsilon} \times \frac{y - 1}{-\frac{3}{2}} = \frac{y - 1}{2}$$

$$= -1 \Rightarrow y - 1 = -2 \Rightarrow y = -1$$

ساختار مستطیل به فرم زیر میشه:

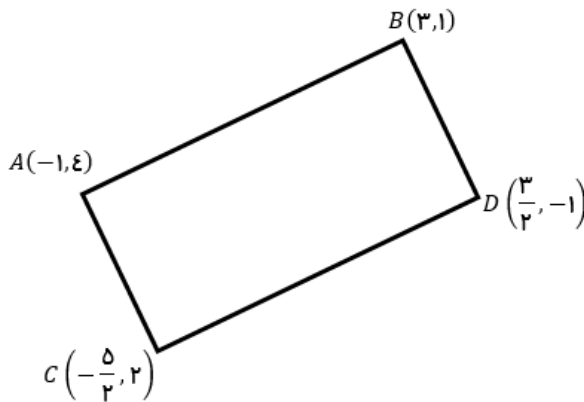
پس طول مستطیل برابر است با:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\varepsilon^2 + 3^2} = 5$$

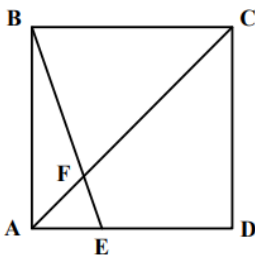
عرض مستطیل هم برابر است با:

$$BC = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

پس محیط برابر است با $2 \left(5 + \frac{5}{2} \right) = 10 + 5 = 15$

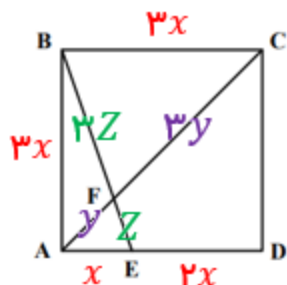


۱۳۴- در مربع شکل زیر، اندازه ED دو برابر AE است. طول EF چند برابر AF است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
- (۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{10}}{3}$
- (۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

حل: اندازه AE رو برابر با x در نظر میگیریم. در اینصورت ED برابر با $2x$ خواهد بود. یعنی عرض مربع برابر با $3x$ میشه. همچنین دو مثلث AFE و BFC متشابه هستن با نسبت تشابه ۳. پس:



طول BE برابر است با $\sqrt{1^2 + 3^2}x = \sqrt{10}x$. پس EF برابر است با $\frac{1}{\sqrt{10}}x$.
 همچنین طول قطر مربع، یعنی AC برابر است با $3\sqrt{2}x$. پس طول AF برابر است با $\frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}x$. بنابراین:

$$\frac{EF}{AF} = \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}x}{\frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}x} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

۱۳۵- در شکل زیر، $AB \parallel CD$ و $EC \parallel DF$ است. اندازه DF چقدر است؟

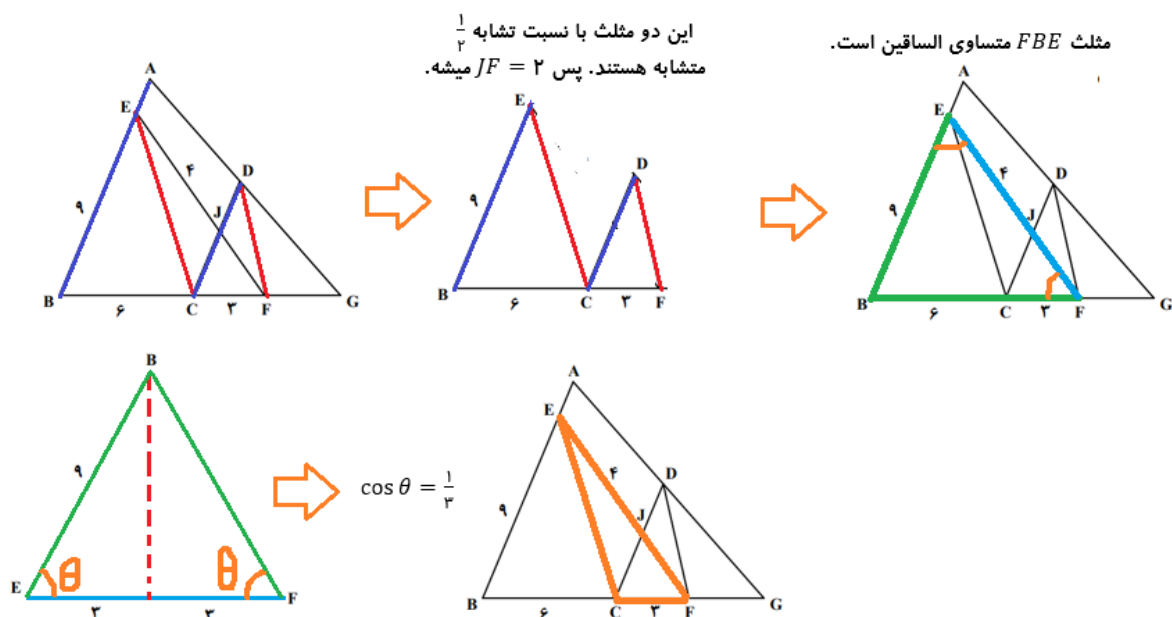
(۱) $\frac{\sqrt{11}}{4}$

(۲) $\frac{\sqrt{11}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{33}}{4}$

(۴) $\frac{\sqrt{33}}{2}$

حل:



طبق قضیه کسینوس‌ها:

$$CE^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \times 6 \times 3 \times \cos \theta = 36 + 9 - 2 \times 6 \times 3 \times \frac{1}{3} = 33 \Rightarrow CE = \sqrt{33}$$

میدونیم EC دو برابر DF است (به علت تشابه). پس:

$$\Rightarrow DF = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

۱۳۶- طول کوتاه‌ترین وتری که از $(-1, 2/5)$ در دایره $2x^2 + 2y^2 - 6x - 10y + 1 = 0$ رسم می‌شود، کدام است؟

$$\frac{\sqrt{7}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \quad (۳)$$

$$\sqrt{7} \quad (۲)$$

$$\sqrt{5} \quad (۱)$$

حل: طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطه به مختصات M در دایره از رابطه $2\sqrt{|C(M)|}$ بدست می‌آید. پس در ابتدا باید مختصات نقطه داده شده رو در معادله دایره جایگذاری کنیم. البته باید معادله دایره رو به فرم استاندارد تبدیل کنیم. یعنی ضریب x^2 و y^2 برابر با ۱ باشد. پس کل معادله رو گسترده رو بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$C(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 5y + \frac{1}{2} \Rightarrow C(M) = (-1)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3(-1) - 5\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$\text{طول کوتاه‌ترین وتر} = 2\sqrt{\left|-\frac{7}{2}\right|} = \sqrt{7}$$

۱۳۷- مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = 14$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های

$A \cup B$ و $A \cap B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

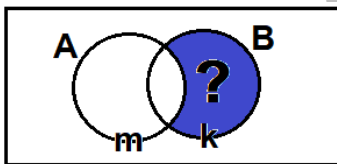
$$۳ \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

$$۶ \quad (۲)$$

$$۸ \quad (۱)$$

حل: نمودار ون صورت مسئله به صورت زیر است:



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = m + k - n(A \cap B) \quad \text{میدونیم که}$$

همچنین طبق اطلاعات صورت مسئله داریم:

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = m + k - n(A \cap B) - n(A \cap B) = m + k - 2n(A \cap B) = 20.$$

هدف مسئله یافتن $n(B - A)$ است که برابر است با $n(B) - n(A \cap B)$. پس:

$$\begin{cases} m + k - 2n(A \cap B) = 20 \\ m - k = 14 \end{cases} \Rightarrow k + 14 + k - 2n(A \cap B) = 20 \Rightarrow$$

$$2k - 2n(A \cap B) = 20 - 14 = 6 \Rightarrow 2(k - n(A \cap B)) = 6 \Rightarrow k - n(A \cap B) = 3$$

۱۳۸- در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d ، تساوی $6a^2 = 5a_4a + 3a_2a$ برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به d ، کدام می‌تواند باشد؟

۴ (۴)

۳/۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

حل: در رابطه داده شده، به جای جملات دوم و سوم به ترتیب $a + d$ و $a + 2d$ را قرار می‌دهیم. پس:

$$6(a + d)^2 = 5(a + 2d)a + 3(a + d)a \Rightarrow 6a^2 + 12ad + 6d^2 = 5a^2 + 10ad + 3a^2 + 3ad$$

$$\Rightarrow 2a^2 + ad - 6d^2 = 0 \quad \text{رابطه I}$$

هدف محاسبه $\frac{a}{d}$ است، یعنی $3 + \frac{a}{d} = \frac{a+3d}{d}$. برای بدست آوردن $\frac{a}{d}$ ، **رابطه I** را بر d^2 تقسیم می‌کنیم. پس:

$$2\left(\frac{a}{d}\right)^2 + \frac{a}{d} - 6 = 0 \Rightarrow 2t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow t = -2, t = \frac{3}{2}$$

پس $3 + \frac{a}{d}$ می‌تواند برابر با ۱ یا برابر با $6/5$ باشد. لذا گزینه ۱ درست است.

۱۳۹- اگر $A = \{\log_9 x + 3 \log_x 3 : x > 1\}$ باشد، کوچک‌ترین عضو مجموعه A کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

$\sqrt{6}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۱)

حل (راه اول): اگر رابطه مجموعه رو ساده کنیم به عبارت زیر میرسیم:

$$\log_9 x + \frac{3}{2} \log_x 3 = \log_9 x + \log_x 3^{\frac{3}{2}}$$

اگر این دو جمله رو در هم ضرب کنیم، طبق خاصیت $\log_b a = \log_c a \times \log_b c$ داریم:

$$\log_9 x \times \log_x 3^{\frac{3}{2}} = \log_9 3^{\frac{3}{2}} = \log_{3^2} 3^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} \log_3 3 = \frac{3}{4}$$

چون حاصل ضرب این دو جمله عدد ثابت $\frac{3}{4}$ است، مینیمم این مجموعه زمانی اتفاق می‌فته که هر دو جمله برابر

با هم برابر باشن، یعنی برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشند. پس مینیمم این مجموعه برابر است با $\sqrt{3}$. $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

راه دوم:

$$\log_{3^2} x + \frac{3}{2} \log_x 3 = \frac{1}{2} \left(\log_3 x + \frac{3}{\log_3 x} \right)$$

با تغییر متغیر $\log_3 x = t$ تابع تبدیل به $\frac{1}{t} \left(t + \frac{3}{t} \right)$ میشه که برای محاسبه کمترین مقدار از این تابع مشتق میزنیم. پس:

$$\left(1 - \frac{3}{t^2}\right) t' = 0 \Rightarrow 1 - \frac{3}{t^2} = 0 \Rightarrow t = \sqrt{3} \Rightarrow \min = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} (2\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

۱۴۰- حداقل چند عضو از مجموعه $f = \left\{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x = \frac{72}{y^2 - 1} \right\}$ حذف شود تا f یک تابع باشد؟

۵ (۴

۴ (۳

۳ (۲)

۲ (۱)

حل: باید اعضای مجموعه f را بدست آوریم. عبارت داده شده رو میتونیم به فرم $y^2 = \frac{72}{x} + 1$ تبدیل کنیم. y^2 می تواند صفر، ۴، ۹ یا ۲۵ باشد که در اینصورت x ها برابر هستند با ۷۲، ۲۴، ۹ یا ۳. پس مجموعه f به صورت زیر است:

$$f = \{(-72, 0), (24, \pm 2), (9, \pm 3), (3, \pm 5)\}$$

برای اینکه مجموعه f بیانگر یک تابع باشد، باید به ازای یک ورودی مشخص، فقط یک خروجی داشته باشیم. پس سه عضو باید حذف گردد.

مهندس سید امید شفیعی

دانش آموخته مهندسی برق دانشگاه علم و صنعت ایران

در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد

مدرس کنکور و دانشگاه

ایمیل: seyedomid.shafiei@gmail.com