

نوین کنکور

کنکور

امتحان نهایی

**نوین کنکور
شرط لازم و کافی
برای موفقیت**

novinkonkor.com

توسط: سید امید شفیعی

۱۱۱- حاصل عبارت $\sqrt[4]{2^8} \times \sqrt[4]{16^2} \times \sqrt[4]{2^2}$ چند برابر $\sqrt{6}$ است؟

(۱) ۲ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) ۳

حل: برای ساده سازی میتونیم رادیکال اول رو به صورت $2^{\frac{8}{4}}$ بازنویسی کنیم.

از این ویژگی $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}} = \sqrt[mn]{a^k} = a^{\frac{k}{mn}}$ استفاده کردیم. رادیکال دوم هم که برابر با $\sqrt[4]{2^8 \times 81}$ میشه که ۸۱ برابر با 3^4 هست. پس $3 \times 2^{\frac{1}{4}}$ همچنین رادیکال سوم رو به صورت زیر ساده می کنیم:

$$\sqrt{2^2 \times 2^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{2^{2+\frac{1}{4}}} = \sqrt{2^{\frac{13}{4}}} = 2^{\frac{13}{8}}$$

مقادیر بدست آمده رو جایگزین میکنیم:

$$2^{\frac{8}{4}} \times (3 \times 2^{\frac{1}{4}}) \times 2^{\frac{13}{8}} = 2^{\frac{8}{4} + \frac{1}{4} + \frac{13}{8}} \times 3 = 2^{\frac{24}{8}} \times 3 = 2^3 \times 3$$

در صورت سوال گفته این مقدار چند برابر $\sqrt{6}$ است. بنابراین باید مقدار بدست آمده را بر آن تقسیم کنیم.
پس:

$$\frac{2^3 \times 3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

۱۱۲- به ازای چند مقدار طبیعی m ، اشتراک دو بازه $A = [\frac{4}{m+1}, +\infty)$ و $B = (-\infty, \frac{5}{m+2}]$ یک مجموعه متناهی است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

حل: نباید اشتراک بازه های داده یک بازه شود، نهایتا باید یک تک نقطه گردد. یعنی انتهای بازه B باید از ابتدای بازه A کوچکتر (یا نهایتا مساوی) باشد. پس:

$$\frac{5}{m+2} \leq \frac{4}{m+1} \Rightarrow \frac{5}{m+2} - \frac{4}{m+1} \leq 0 \Rightarrow \frac{5(m+1) - 4(m+2)}{(m+2)(m+1)} \leq 0$$

$$\frac{m-3}{(m+2)(m+1)} \leq 0$$

با تعیین علامت عبارت فوق متوجه میشیم که m باید در بازه های $(-1, 3] \cup (-\infty, -2)$ باشد. ولی چون مقدار طبیعی خواسته فقط مقادیر ۱، ۲ و ۳ قابل قبول هستند.

تذکره: توجه کنید که به ازای $m = 3$ این دو بازه به صورت $A = [\varepsilon, \infty)$ و $B = (-\infty, \varepsilon]$ می شوند که اشتراکشان تنها یک نقطه و بنابراین متناهی است. برای دو مقدار دیگر این دو بازه اشتراکی ندارند یا بیان دیگر اشتراک آن ها مجموعه تهی است که باز هم متناهی است.

۱۱۳- اگر a, b, c سه جمله نخست و متمایز یک دنباله حسابی بوده و $\frac{1}{4}c, \frac{1}{2}a, b$ سه جمله نخست یک دنباله هندسی باشند، دو برابر قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) -۲

حل: چون این سه عدد تشکیل تصاعد حسابی می دهند پس:

$$2b = a + c$$

از طرفی سه جمله دیگر چون تشکیل تصاعد هندسی می دهند، پس:

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = b\left(\frac{1}{4}c\right) \Rightarrow a^2 = bc$$

هدف محاسبه دو برابر قدرنسبت تصاعد هندسی است، یعنی $\frac{a}{b} \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{b^2}$ پس در رابطه اول کل عبارت را بر b تقسیم میکنیم و در عبارت دوم بر b^2 تا بتوانیم نسبت $\frac{a}{b}$ را مشاهده کنیم.

$$\frac{2b}{b} = \frac{a+c}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{bc}{b^2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c}{b}$$

پس به جای $\frac{c}{b}$ می توانیم مقدار $\frac{a^2}{b^2}$ را در عبارت ما قبل جایگاری کنیم. یعنی

$$2 = \frac{a}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow t + t^2 = 2 \Rightarrow t = 1, t = -2$$

$t = 1$ نمی تواند قابل قبول باشد، میتونی بگی چرا؟!

۱۱۴- مجموعه جواب نامعادله $(5-2m)x^2 - (2m+n-5)x - n < 0$ به صورت بازه $(-1, m-2)$ است. اگر m عدد طبیعی باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

حل: با مرتب کردن معادله درجه دوم به صورت $(5-2m)x^2 - (2m+n-5)x - n < 0$ متوجه میشیم که باید نمودار سهمی رو به بالا باشد، چرا که جواب این نامعادله به فرم بازه محدود $(-1, m-2)$ است و همچنین -1 و $m-2$ نیز ریشه‌های آن هستند. پس در وهله اول $5-2m > 0$ باید باشد و چون در صورت سوال قید شده که m عددی طبیعی است، فقط مقادیر $m = 1, 2$ قابل قبول هستند. اگر $m=1$ باشد که بازه به فرم $(-1, -1)$ تبدیل می‌شود که قابل قبول نیست، پس $m = 2$ است و بازه جواب $(-1, 0)$ است و معادله باید به فرم $x^2 + x < 0$ باشد، پس $n = 0$ است و لذا $m+n = 2+0 = 2$.

۱۱۵- ارتفاع یک مثلث ۲ واحد بیشتر از ۳ برابر قاعده آن است. اگر ۴ واحد هم به ارتفاع و هم به قاعده این مثلث اضافه شود، مساحت مثلث جدید $4/5$ برابر مساحت مثلث اولیه می‌شود. مساحت مثلث اولیه کدام است؟

(۱) ۸ (۲) $14/5$ (۳) $16/5$ (۴) ۲۸

حل: اگر ارتفاع را با h و قاعده را با a نمایش دهیم، آنگاه $h = 2 + 3a$ و همچنین مساحت مثلث اولیه برابر با $S = \frac{1}{2}ah$ و مساحت مثلث ثانویه برابر با $S = \frac{1}{2}(a+\varepsilon)(h+\varepsilon)$ خواهد بود. چون گفته مساحت مثلث ثانویه $5/4$ برابر مساحت مثلث اولیه است، پس:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{2}(a+\varepsilon)(h+\varepsilon)}{\frac{1}{2}a(h)} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{(a+\varepsilon)(2+3a+\varepsilon)}{a(2+3a)} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{(a+\varepsilon) \times 3 \times (a+2)}{a(3a+2)} = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+\varepsilon)(a+2)}{a(3a+2)} = \frac{3}{2}$$

با حدس زدن $a = 2$ و بنابراین $h = 2 + 3(2) = 8$ و $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(2)(8) = 8$

به سوال: آگه نخواستی حدس بزنی چطور باید این معادله حل کنی!؟

۱۱۶- اگر f تابع همانی و g تابع ثابت بوده و $g(3x) + 2f(3+x) = 3 + 2x$ باشد، مقدار $\frac{f(-1)}{g(4)}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

حل: تابع f همانی است، یعنی هر چی بدی همون رو میگیری، پس نتیجتاً $f(3+x) = 3+x$ و همچنین $f(-1) = -1$ است. تابع g هم چون ثابت است، پس همواره برابر با k است. لذا:

$$k + 2(3+x) = 3 + 2x \Rightarrow k = -3$$

پس: $\frac{f(-1)}{g(1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

۱۱۷- اگر $f(x) = \sqrt{a-x}$ و $g(x) = 3-x$ باشد، به ازای کدام مقدار a ، توابع f و g روی محور y ها متقاطع اند؟
 (۱) ۱/۲۵ (۲) ۱/۵ (۳) ۲/۲۵ (۴) ۲/۵

حل: چون گفته این دو تابع بر روی محور y ها تلاقی دارند، یعنی عرض از مبدا یکسان دارند، پس:

$$g(f(\cdot)) = f(\cdot) \Rightarrow 3 - f(\cdot) = f(\cdot) \Rightarrow f(\cdot) = \frac{3}{2} = \sqrt{a} \Rightarrow a = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2/25$$

۱۱۸- مجموع جذر معکوس ریشه‌های معادله $36x^2 - (m+14)x + 1 = 0$ برابر ۵ است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله $mx^2 + 3x + 2 = 0$ کدام است؟
 (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) ۲ (۴) ۳

حل: اگر α و β ریشه‌های معادله اول باشند، آنگاه حاصل ضرب و حاصل جمع این دو ریشه به ترتیب برابر با $\alpha + \beta = \frac{m+14}{36}$ و $\alpha\beta = \frac{1}{36}$ است و همچنین مجموع مجذور این دو ریشه به صورت زیر قابل ساده سازی است:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 5 \Rightarrow \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}} = 5 \Rightarrow \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{36}}} = 5 \Rightarrow \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} = \frac{5}{6} \xRightarrow{\text{توان دو}} \beta + \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} = \frac{25}{36}$$

$$\frac{m+14}{36} + 2\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{25}{36} \Rightarrow \frac{m+14}{36} = \frac{13}{36} \Rightarrow m = -1$$

پس حاصل ضرب ریشه‌های معادله آخر که برابر با $\frac{2}{m}$ است برابر با -۲ خواهد شد.

۱۱۹- تابع $y = \frac{x}{|x|} \sqrt{a+bx^2}$ و وارون آن از نقطه $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ می‌گذرند. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) -۳ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۱

حل: هم نقطه $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ و هم نقطه $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ باید در معادله تابع صدق کنند. میدونیم که تابع $\frac{x}{|x|}$ صرفاً به عنوان یه ضریب عمل میکنه و برای مقادیر مثبت برابر با ۱ و برای مقادیر منفی برابر با -۱ است که در اینجا همواره برابر با -۱ است. پس:

$$-\frac{4}{5} = -\sqrt{a + b\left(\frac{9}{25}\right)} \Rightarrow \frac{16}{25} = a + \frac{9}{25}b$$

$$-\frac{3}{5} = -\sqrt{a + b\left(\frac{16}{25}\right)} \Rightarrow \frac{9}{25} = a + \frac{16}{25}b$$

با کم کردن طرفین این دو معادله از هم داریم:

$$\frac{16}{25} - \frac{9}{25} = b\left(\frac{9}{25} - \frac{16}{25}\right) \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 1$$

۱۲۰- به ازای چند مقدار صحیح از m تابع $f = \{(-5, 4-m), (2, 2m+3), (10, -10), (3, m-2)\}$ نزولی است؟
 ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

حل: دقت کن که مولفه‌های صورت سوال و در ابتدا باید به صورت صعودی یا نزولی (از منظر مولفه اول) مرتب بشن تا بتونیم مولفه‌های دوم رو با هم مقایسه کنیم. یعنی:

$$f = \{(-5, 4-m), (2, 2m+3), (3, m-2), (10, -10)\}$$

چون تابع نزولی است، پس مقادیر عرض این نقاط با افزایش مولفه اول یا باید کم شود یا مساوی باقی بماند، لذا:

$$4-m \geq 2m+3 \geq m-2 \geq -10$$

پس باید سه نامعادله $4-m \geq 2m+3 \Rightarrow m \leq \frac{1}{3}$ و $2m+3 \geq m-2 \Rightarrow m \geq -5$ و $m-2 \geq -10 \Rightarrow m \geq -8$ اشتراک بگیریم که برابر با $\frac{1}{3} \geq m \geq -5$ که شامل ۶ عدد صحیح می باشد، یعنی $m = -5, -4, -3, -2, -1, 0$.

۱۲۱- اگر $(2, a+b) \cup (4b-a, 5)$ یک همسایگی محذوف ۴ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

$$\frac{5}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{4}{5} \quad (۳)$$

$$-\frac{5}{4} \quad (۲)$$

$$-\frac{4}{5} \quad (۱)$$

حل: در اینجا باید $a+b = 4b-a = 4$ باشد، پس باید یه دستگاه دو معادله - دو مجهولی حل کنیم:

$$\begin{cases} a + b = \varepsilon \\ -a + \varepsilon b = \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \varepsilon b = \varepsilon \Rightarrow b = \frac{\varepsilon}{\varepsilon}, a = \varepsilon - b = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{12}{\varepsilon}$$

$$b - a = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{12}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon}$$

۱۲۲- در یک متوازی‌الاضلاع به مساحت ۵۴، نسبت دو ضلع مجاور ۲ به ۳ است. اگر زاویه بزرگ‌تر بین دو ضلع مجاور ۱۵۰ درجه باشد، محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟

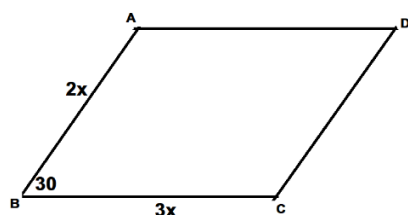
(۴) $30\sqrt{2}$

(۳) $15\sqrt{2}$

(۲) ۱۵

(۱) ۳۰

حل: می‌دانیم که مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ از رابطه $S = AB \times AC \times \sin A$ بدست می‌آید که A زاویه بین این دو ضلع (که ۳۰ یا ۱۵۰ درجه است). پس:



$$S_{ABCD} = (2x)(3x) \sin 30^\circ = 3x^2 = 54 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

محیط این متوازی‌الاضلاع برابر است با $2(2x + 3x) = 10x = 10(3\sqrt{2}) = 30\sqrt{2}$

۱۲۳- اگر $\alpha = 22/5$ درجه باشد، حاصل $A = -1 + \tan(7\alpha)$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

(۳) $1 - \sqrt{2}$

(۲) $-\sqrt{2}$

(۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل: زاویه $22/5$ درجه که همون $\frac{\pi}{8}$ هست، پس ما باید حاصل $-1 + \tan \frac{7\pi}{8}$ رو محاسبه کنیم که می‌دانیم برابر با $-1 - \tan \frac{\pi}{8}$ است. چون زاویه‌های مکمل تانژانت قرینه دارند، زاویه را به $\frac{\pi}{8}$ کاهش دادیم. پس هدف محاسبه $\tan \frac{\pi}{8}$ است. طبق رابطه بسط تانژانت داریم:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2t}{1 - t^2} = 1 \Rightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \pm \sqrt{2}$$

مقدار منفی قابل قبول نیست، چون زاویه حاده است و تانژانش باید مثبت باشد، پس:

$$A = -1 - (-1 + \sqrt{2}) = -\sqrt{2}$$

۱۲۴- در بازه $[0, \pi]$ معادله مثلثاتی $\sin 2x = \cos 3x$ چند جواب دارد؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

حل: برای حل این معادله عبارت سمت راست تساوی رو میتونیم به صورت زیر ساده کنیم:

$$\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

پس جواب این معادله به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \\ 2x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - 3x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{(4k+1)\pi}{10} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

رابطه دوم در محدوده داده شده جواب ندارد. رابطه اول به ازای $k = 0, 1, 2$ در ربع اول و دوم جواب دارد.

۱۲۵- اگر مقادیر تقریبی $\log_2 7 = 2/8$ و $\log_5 2 = 0/5$ باشد، حاصل $\log_{14} 10$ کدام است؟

$\frac{9}{14}$ (۴)

$\frac{11}{14}$ (۳)

$\frac{10}{19}$ (۲)

$\frac{15}{19}$ (۱)

حل: برای محاسبه این لگاریتم می توان طبق قاعده تغییر مبنای، مبنای ۲ یا ۵ (مبنای اطلاعات مسئله) تبدیل کنیم که ما در اینجا به ۲ تبدیل می کنیم. پس:

$$\log_{14} 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 14} = \frac{1 + \log_2 5}{1 + \log_2 7} = \frac{1 + \frac{1}{\log_5 2}}{1 + 2/8} = \frac{3}{3/8} = \frac{30}{38} = \frac{15}{19}$$

۱۲۶- ضریب تغییرات داده های $1, 1/8, 1/2, 1/16, 1/16$ کدام است؟

$\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۴)

$\frac{1}{6\sqrt{3}}$ (۳)

$\frac{1}{3\sqrt{5}}$ (۲)

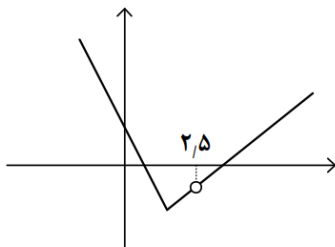
$\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (۱)

حل: میانگین این ۵ عدد برابر است با $1/12$ ، پس:

$$\sigma^2 = \frac{(\cdot/8)^2 + (\cdot/4)^2 + (\cdot/2)^2 + (\cdot/16)^2 + (\cdot/16)^2}{5} = \frac{\cdot/256}{5} \Rightarrow \sigma = \frac{\cdot/16}{\sqrt{5}}$$

$$C.v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\cdot/16}{1/12} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

۱۲۷- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + ax + b}{4x - c} & x \geq 1 \\ 4 - \frac{c}{2}x & x < 1 \end{cases}$ به صورت زیر رسم شده است. مقدار $a + b$ کدام است؟



- (۱) ۴
(۲) ۱
(۳) -۱
(۴) -۴

حل: ۲/۵ باید ریشه مخرج ضابطه اول باشد، پس $10 - c = 0 \Rightarrow c = 10$. پس ضابطه پایینی به صورت $4 - 5x$ تبدیل میشود که به ازای $x = 1$ برابر با -۱ خواهد شد. لذا این نقطه باید در ضابطه بالایی هم صدق کند. پس:

$$x = 1 \Rightarrow -1 = \frac{2 + a + b}{4(1) - 10} \Rightarrow a + b = 4$$

۱۲۸- تابع با ضابطه $f(x) = 2 \left[\frac{2-x}{2} \right] + a \left[\frac{x+2}{3} \right]$ در نقطه $x = -2$ حد دارد. مقدار $\left[\frac{a}{3} \right]$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

حل: مقدار حد چپ در نقطه $x = -2$ یعنی $x = (-2)^-$ برابر با $4 - a = 2 \left[\frac{-2+2}{2} \right] + a \left[\frac{-2+2}{3} \right] = 0$ میشود. حد راست هم برابر با $2 \left[\frac{2+1/9}{2} \right] + a \left[\frac{-1/9+2}{3} \right] = 2$ پس:

$$4 - a = 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \left[\frac{2}{3} \right] = 0$$

۱۲۹- اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - k[x]}{x^2 - 1} = -\infty$ باشد، نقاط $(k\pi, \cos k\pi)$ در کدام ناحیه محوره‌های مختصات قرار دارند؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

حل: حد راست و چپ این عبارت هر دو منفی شدن. پس باید بریم هر دو حالت رو بررسی کنیم. اول حد راست رو بدست بیاریم، یعنی $x \rightarrow (-1)^+$ ، یعنی مثلاً (-0.9) که برابر با $\frac{1+k}{-}$ میشه که صورت باید مثبت باشه، یعنی $-1 < k \Rightarrow 1 + k > 0$.

بریم حد چپ هم بررسی کنیم. در اینجا باید مثلاً تابع در $-1/1$ بررسی کنیم. مخرج صفرِ حدی مثبت، یعنی $(0)^+$ همیشه. صورت هم باید منفی باشه، پس:

$$1 + 2k < 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{2}$$

پس $-\frac{1}{2} < k < -1$ همیشه و در این بازه $k\pi$ و همچنین $\cos k\pi$ منفی میشه و ربع سوم میشه.

۱۳۰- تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + mx + n}{a - x} & x \neq a \\ 2 & x = a \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. اگر $f(2a) = 0$ باشد، مقدار $n - m$ کدام است؟

۱۴ (۴)
۱۲ (۳)
-۴ (۲)
(۱) -۲

حل: ضابطه اول پس از رفع ابهام، حاصل حدش باید ۲ بشه، میتونیم هوییتال بزیم، پس:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x + m}{-1} = 2 \Rightarrow 2a + m = -2$$

از طرفی هم a و هم $2a$ ریشه های صورت هستن، پس ضربشون باید برابر با $\frac{c}{a} = n$ و جمعشون برابر با $-\frac{b}{a} = -m$ گردد. بنابراین:

$$\begin{cases} 2a + a = -m \\ 2a^2 = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = -m \\ 2a^2 = n \end{cases}$$

با جایگذاری رابطه $3a = -m$ در رابطه اول داریم:

$$2a - 3a = -2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow m = -6$$

همچنین طبق رابطه سوم $n = 2a^2 = 8$ پس $n - m = 8 - (-6) = 14$

۱۳۱- خط $y + ax = 2$ در نقطه‌ای به طول ۴ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $f(4) + f'(4) = -1$ باشد، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

-۱ (۴)
-۰٫۶ (۳)
۰٫۶ (۲)
(۱) ۱

حل: چون این خط بر منحنی در نقطه ε مماس است، یعنی شیب منحنی یا مشتقش برابر با شیب خط و همچنین مقدار تابع با مقدار این خط در ε برابر است. پس:

$$\begin{cases} f(\varepsilon) = 2 - \varepsilon a \\ f'(\varepsilon) = -a \end{cases} \Rightarrow 2 - \varepsilon a - a = -1 \Rightarrow 2 - \delta a = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{\delta} \Rightarrow f'(\varepsilon) = -a = -\frac{3}{\delta}$$

۱۳۲- خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر نمودار تابع $f(x) = 2\sqrt{x}(4x^2 + 3)$ مماس است. شیب خط d چقدر است؟

۱۲ (۴)

۶ (۳)

۸√۲ (۲)

۴√۲ (۱)

حل: مشتق این تابع برابر است با:

$$f(x) = 8x^{\frac{5}{2}} + 6\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 20x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{20x^2 + 3}{\sqrt{x}}$$

معادله خط مماس بر این تابع در نقطه $x = a$ برابر است با:

$$y - 2\sqrt{a}(4a^2 + 3) = \frac{20a^2 + 3}{\sqrt{a}}(x - a)$$

مبدأ باید در این خط صدق کند، پس:

$$y - 2\sqrt{a}(4a^2 + 3) = \frac{20a^2 + 3}{\sqrt{a}}(x - a) \Rightarrow -2\sqrt{a}(4a^2 + 3) = \frac{20a^2 + 3}{\sqrt{a}}(-a)$$

$$2(4a^2 + 3) = 20a^2 + 3 \Rightarrow 12a^2 = 3 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \frac{20(\frac{1}{4}) + 3}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 8\sqrt{2}$$

۱۳۳- نقاط A و B به ترتیب، روی منحنی‌های $y = x^2 - 2x - 3$ و $y = x^2 + x^2 + 1$ قرار دارند. اگر این نقاط روی خطی به موازات محور y باشند، کمترین مقدار طول پاره خط AB کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

حل: چون پارخ خط موازی محور y ها است، پس این دو نقطه طول‌های یکسان داشته‌اند، یعنی مثلاً $x = k$. پس برای بدست آوردن فاصله (طول پاره خط) کافی است مقدار عرض این نمودار را در این نقطه پیدا کرده و از هم کم کرد، پس:

$$x = k \Rightarrow (k^3 + k^2 + 1) - (k^3 - 2k - 3) = k^2 + 2k + 4$$

کمترین مقدار این تابع (سه‌می) در راس آن (یعنی $k = -1$) رخ می‌دهد که برابر است با $1 - 2 + 4 = 3$

۱۳۴- با ارقام ۰، ۱، ۳، ۵، ۷، ۸، ۹ چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت که از ۷۸۱ کوچک‌تر باشد؟

۱۰۳ (۴)

۱۱۱ (۳)

۱۲۵ (۲)

۱۳۳ (۱)

حل: کل اعداد سه رقمی بدون تکرار ارقام برابر است با $6 \times 6 \times 5 = 180$.

حال میتوانیم اعداد بزرگتر از ۷۸۱ رو از کل کم کنیم. اعدادی که رقم صدگان آن‌ها ۸ یا ۹ باشد که قطعاً بزرگتر است، پس $6 \times 6 \times 5 = 60$. همچنین اعداد ۷۸۱، ۷۸۳، ۷۸۵، ۷۸۹ که ۴ عدد است و اگر صدگان ۷ و دهگان ۹ و یکان یکی از ۵ رقم دیگر باشد که مجموعاً ۵ عدد میشود باید از تعداد کل کم شود. پس:

$$180 - 60 - 9 = 111$$

۱۳۵- در یک کیسه کارتهایی به شماره ۱ تا ۸ وجود دارد. ۳ کارت به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم، با کدام احتمال یکی از اعداد روی کارت‌ها شمارنده دوتای دیگر است؟

$$\frac{25}{56} \quad (4)$$

$$\frac{9}{56} \quad (3)$$

$$\frac{3}{8} \quad (2)$$

$$\frac{3}{7} \quad (1)$$

حل: تعداد کل برابر است $n(S) = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56$ حال باید تعداد کارت‌های را بیاییم که یکی از اعداد شمارنده دو عدد دیگر باشد. اگر یکی از اعداد ۱ باشد، همه حالت‌های ممکن برای انتخاب دو کارت دیگر قابل قبول است. پس تعداد $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$. اگر یک کارت ۲ باشد، دو کارت دیگر باید از کارت‌های زوج، یعنی ۴، ۶ و ۸ انتخاب شود، یعنی $\binom{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$. پس کل حالات مطلوب برابر با $21 + 3 = 24$ خواهد شد و احتمال برابر است با:

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

۱۳۶- در یک ظرف ۵ مهره سیاه و تعدادی مهره سبز وجود دارد. دو مهره به تصادف از ظرف خارج می‌شود، احتمال اینکه حداقل یک مهره سیاه باشد، برابر $\frac{5}{6}$ است. تعداد مهره سبز چقدر از تعداد مهره سیاه کمتر است؟

$$\frac{5}{6}$$

$$1 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

حل: چون احتمال اینکه حداقل یک مهره سیاه برابر با $\frac{5}{6}$ است، احتمال متمم آن، یعنی هیچ مهره سیاهی انتخاب نشود، برابر با $\frac{1}{6}$ است. اگر تعداد مهره های سبز رنگ برابر با n باشد، احتمال انتخاب مهره اول با رنگ سبز برابر با $\frac{n}{n+5}$ و احتمال انتخاب مهره دوم با رنگ سبز هم برابر با $\frac{n-1}{n+4}$ است. پس:

$$\frac{n}{n+5} \times \frac{n-1}{n+4} = \frac{1}{6}$$

برای حل این معادله می‌توانیم از گزینه‌ها کمک بگیریم، چون سبزه‌ها از سیاه‌ها کمتر هستند، پس تعدادشان، باید ۴، ۳ یا نهایتاً ۲ باشد (زیر ۲ نمی‌تواند باشد). با چک کردن این دو مقدار تعداد برابر با ۴ خواهد بود و بنابراین $5 - 4 = 1$.

۱۳۷- مثلثی با اضلاع ۴، ۵ و x با مثلثی با اضلاع ۳، ۷ و y متشابه است. اختلاف کمترین و بیشترین مقادیر ممکن برای y کدام است؟

$$2,8 \quad (4)$$

$$3,15 \quad (3)$$

$$6,35 \quad (2)$$

$$7,2 \quad (1)$$

حل: باید حالت‌های مختلف رو بررسی کنیم. کلاً ۶ حالت ممکن است ایجاد شود که ۲ حالت آن به صورت $\frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{x}{y}$ یا $\frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{x}{y}$ می‌شود که قابل قبول نیست، چون تناسب اول برقرار نیست. پس ۴ حالت دیگر را بررسی میکنیم.

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \frac{35}{3}, y = \frac{12}{5} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{5}{y} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \frac{28}{3}, y = \frac{15}{5} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

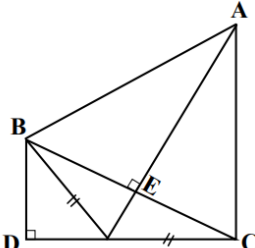
$$\frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \frac{15}{3}, y = \frac{28}{5}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \frac{12}{3}, y = \frac{35}{5}$$

$$\Delta y = \frac{35}{5} - \frac{28}{5} = 1.4 - 5.6 = -4.2$$

تذکر: در دو حالت اول و دوم همچنین مثلی نمی‌تواند وجود داشته باشد، چون در هر مثلث همواره مجموع دو ضلع باید از ضلع سوم بزرگتر باشد.

۱۳۸- در شکل زیر، $BD=2$ ، $CD=4$ و زاویه $\hat{ACD}$ قائمه است. مساحت مثلث ABE کدام است؟

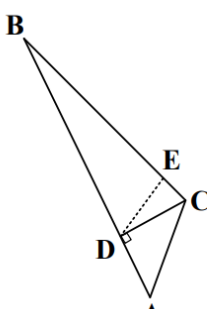


۱۰ (۱)
۷.۵ (۲)
۵ (۳)
۲.۵ (۴)

حل: میدونیم که اگر فاصله نقطه‌ای از دو سر یه پاره خط به یه اندازه باشه، اون نقطه روی نیمساز زاویه تشکیل شده قرار داره، پس در اینجا AM نیمساز زاویه A است و مثلث‌های AEB و AEC هم نهشت هستند. حالا در مثلث BDC میدونیم که دو مثلث ECM و BDC متشابه هستن، از طرفی دو مثلث AEC و EMC هم متشابه هستن (چون ارتفاع وارد بر وتر هست و مثلث AMC رو به دو مثلث متشابه تقسیم میکنه)، پس دو مثلث AEC و BDC متشابه هستن و کافیه که نسبت تشابه رو بدست بیاریم. مساحت $S_{BDC} = 4$ هست. کل BC هم که برابر با $2\sqrt{5}$ میشه (فیثاغورس بزن) و بنابراین EC نصفش میشه، یعنی $\sqrt{5}$. پس حالا اگر دو مثلث AEC کل مثلث BDC رو در نظر بگیریم، نسبت تشابه برابر میشه با $k = \frac{EC}{BD} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. پس مساحت برابر میشه با:

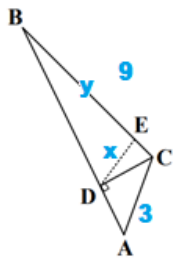
$$S = 4k^2 = 4\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 5$$

۱۳۹- اگر $AC=3$ ، $BC=9$ و DE بر BC عمود باشد، طول BE کدام است؟ ($\hat{C} = 90^\circ$)



(۱) $\frac{8}{1}$
 (۲) $\frac{7}{2}$
 (۳) $\frac{6}{4}$
 (۴) $\frac{5}{6}$

حل: طبق تالس در مثلث زیر داریم:



$$\frac{x}{3} = \frac{y}{9} \Rightarrow y = 3x$$

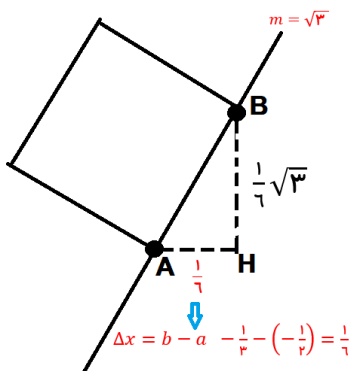
حالا در مثلث BDC که قائم الزاویه است، میدانیم که ارتفاع وارد بر وتر (DE) ، واسطه هندسی دو قطعه ایجاد شده روی وتر است. یعنی:

$$x^2 = y(9 - y) = 3x(9 - 3x) \Rightarrow x = 27 - 9x \Rightarrow x = 2/7 \Rightarrow y = 3x = 3(2/7) = 6/7$$

۱۴۰- دو نقطه با مختصات $(-\frac{1}{3}, b)$ و $(-\frac{1}{3}, a)$ دو رأس مجاور یک مربع بوده و روی خط Δ قرار دارند. اگر شیب خط Δ برابر $\sqrt{3}$ باشد، طول قطر این مربع کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
 (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل: اول ساختار کلی سوال رو رسم میکنیم. به صورت زیر:



چون شیب خط برابر با $\sqrt{3}$ است، پس طول BH باید $\sqrt{3}$ برابر طول AH باشد و طول وتر (طبق فیثاغورس) باید ۲ برابر طول AH باشد. پس پس طول وتر (ضلع مربع) برابر است با $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$ و نتیجتاً قطر این مربع $\sqrt{2}$ برابر آن است.

سید امید شفیعی

دانش آموخته دانشگاه علم و صنعت ایران

در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد

نویسنده کتاب ریاضیات جامع تجربی (ریاضی سنجاب)

Instagram: [riazi.sanjob](https://www.instagram.com/riazi.sanjob)

ایمیل: seyedomid.shafiei@gmail.com

نوین کنکور

کنکور

امتحان نهایی

**نوین کنکور
شرط لازم و کافی
برای موفقیت**

novinkonkor.com